

# LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE D'ISAAC NEWTON

Christian SCOTTA

*Les 'Principes Mathématiques de la philosophie naturelle' paru en 1867 est l'œuvre majeure d'Isaac Newton et l'un des plus importants livres scientifiques jamais édité qui fonde la physique classique. Christian Scotta en a produit l'une des rares traductions en français en 1991, malheureusement quasi introuvable aujourd'hui mais disponible à la Bibliothèque National de France (BNF).*

*Ce livret présente une synthèse accessible de cette œuvre dans laquelle Newton développe une vision mathématisée de la nature.*



SOCIÉTÉ  
d'ASTRONOMIE  
de NANTES

Société Scientifique d'Éducation Populaire agréée Jeunesse et Sports  
35, boulevard Louis Millet - 44300 NANTES - Tél. 02 40 68 91 20 - Fax 02 40 93 81 23  
Internet : [www.san-fr.com](http://www.san-fr.com) - E-mail : [san@san-fr.com](mailto:san@san-fr.com)



N° 2

# LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE D'ISAAC NEWTON

Christian SCOTTA



Les Cahiers de la SAN

# La Société d'Astronomie de Nantes

Résolument tournée vers le grand public, la SAN vous propose de découvrir l'astronomie ou d'approfondir vos connaissances dans ce domaine de multiples façons :

- Assister aux exposés d'astronomie présentés lors des réunions du vendredi soir, ouvertes à tous les adhérents, au local de la Société à partir de 20h30.
- Consulter ou emprunter l'un des mille ouvrages que possède le fonds bibliothécaire.
- Participer aux observations de découverte ou de perfectionnement. Vous pouvez également emprunter un instrument.
- Assister aux conférences au cours desquelles des astronomes et astrophysiciens de renom viennent présenter les derniers acquis de leurs travaux.
- Solliciter la SAN pour animer des actions pédagogiques préparées à l'attention de public scolaire ou adulte.
- Visiter les expositions auxquelles la SAN participe régulièrement.
- Apporter votre contribution à la réalisation de travaux pratiques d'astronomie tels que la mesure de la masse de Jupiter ou l'évaluation des altitudes des reliefs lunaires.
- Réfléchir et débattre des grands thèmes de la physique, de l'astrophysique et de la science en général au sein d'un groupe de réflexion théorique.
- Enfin, l'astronomie nécessitant des connaissances et des compétences multiples (en optique, mécanique, électronique, etc.), offrir un peu de votre temps pour la conception ou à la réalisation de projets astronomiques.

Pour participer à ces activités, il vous suffit de devenir adhérent.

*La Société d'Astronomie de Nantes est une association fondée en 1971 et régie par la loi de 1901.*

- 46 - *Énoncés des propositions de la section 13 du livre 1 :*  
« *si deux corps semblables l'un à l'autre, constitués par de la matière également attractive...* » (proposition 87);  
ou: « *si les forces attractives des particules égales d'un corps ...* » (proposition 88).
- 47 - Voir « *Traité d'Optique* », question 31, pages 453 et 454 de la traduction de P. COSTES.
- 48 - *Scholie* placé en fin de la section 11 du livre 1.
- 49 - « *Le Système du Monde* », p 26 et 29.
- 50 - *Principia* 1716, p 530.
- 51 - LAPLACE, livre 3, ch 1.
- 52 - LAPLACE, livre 4, ch 1.
- 53 - LAPLACE, livre 4, ch 17.

## LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE D'ISAAC NEWTON

Christian SCOTTA

Édition 2011

- 33 - DESCARTES, « *Principes de la Philosophie* », 2<sup>e</sup> Partie, Article 42.
- 34 - Sur les tourbillons, DESCARTES, « *Principes de la Philosophie* », 3<sup>e</sup> Partie, notamment Articles 30 et 84 ; Fontenelle, « *Entretien, sur la Pluralité des Mondes* », 1686, 4<sup>e</sup> Soir ; R. DUGAS, « *la Mécanique au XVII<sup>e</sup> siècle* », p 187.
- 35 - voir page 3.
- 36 -  $- a/A^2$  est la variation de  $1/A$  (livre 2, lemme 2, cas n° 4, *Principia* 1726, p 245).
- 37 - DESCARTES énonce cette propriété des fluides: « *Principes de la Philosophie* », 2<sup>e</sup> Partie, Article 33 ; il l'applique dans sa théorie des marées : 4<sup>e</sup> partie, article 49.
- 38 - De la composition de la vitesse orbitale de  $P$  avec son accélération vers le corps  $S$  nait un mouvement dirigé à la fois vers la ligne  $ST$  et vers le corps de  $S$ . Il en est de même à l'opposition.
- 39 - Les nœuds de l'orbite de  $P$  sont les points d'intersection de cette orbite avec le plan dans lequel se trouve le corps  $S$ .
- 40 - Développement de l'équation :  $M a^2 - (a^2 + r^2 - 2 ar) / (a - r)^2 a^2 = M 2 ar - r^2 / (a - r)^2$ .  
On néglige  $r^2$  dans le numérateur ; dans le dénominateur,  $(a - r) = a$ .  
D'où :  $M 2 ar / a^2 a^2$  ou  $M 2r / a^3$ .
- 41 - Voir Jean le Rond D'ALEMBERT, « *Recherches sur la précession des équinoxes* » (1749), Introduction, cité in « *Astronomie et Astrophysique : Textes essentiels* » par J.P. VERDET, éditions Larousse.
- 42 - LAPLACE, « *Exposition du Système du Monde* », livre 3, Ch 1.
- 43 - *Scholie* placé en fin de la section 11.
- 44 - *Scholie* placé en fin de la définition 8.
- 45 - Énoncés des propositions de la section 12 du livre 1 : « *Si à chaque point d'une sphère...* »

Les « **Cahiers de la SAN** » sont édités par la Société d'Astronomie de Nantes,  
*Société Scientifique d'Éducation Populaire agréée Jeunesse et Sports.*

35, boulevard Louis-Millet  
44300 NANTES

Tél. 02 40 68 91 20 - Fax 02 40 93 81 23 - E-mail : san@san-fr.com

© Toute reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit,  
sans l'autorisation de la Société d'Astronomie de Nantes, est interdite.

- 15 - Texte de l'édition de 1687.  
 16 - Définition 7.  
 17 - GALILÉE, « *Discours contenant deux sciences nouvelles* », 3<sup>e</sup> Journée, Théorème 1.  
 18 - *Principia*, livre 1, proposition 4.  
 19 - *Principia*, livre 3, hypothèse 9, p 403 de l'édition de 1687.  
 20 - *Principia*, livre 3, hypothèse 2 de l'édition de 1687.  
 21 - *Principia*, livre 3, corollaire 1.  
 22 - Même référence qu'au 21.  
 23 - « *Le Système du Monde* », 1731, p 26-27.  
 24 - l'Unité Astronomique est la distance Terre-Soleil.  
 25 - Formule trigonométrique :  $206265 : (32'2 \times 60'') = 106$ .  
 26 - La force de Jupiter sur Callisto n'est autre que le poids de Callisto sur Jupiter.  
 27 - cf « *Système du Monde* », éditions Tonson, p 17.  
 28 - L'arc *HI* décrit par le rayon *HC* mené vers le centre *C* de la sphère est égal à l'arc *HI* décrit par le rayon *HP* mené vers un point *P* à l'intérieur de la sphère, parce que si l'angle *HCI* est multiplié (ou divisé) par un nombre *x* pour obtenir l'angle *HPI*, le rayon *HC* est divisé (ou multiplié) par le même nombre *x* pour obtenir le rayon *HP*. Donc, les arcs *HI* sont égaux, bien que les angles et les arcs soient inégaux.  
 29 - Comme nous l'avons expliqué page 2, et pages 7 - 8.  
 30 - La valeur de l'accélération résulte de la comparaison des pesanteurs aux pôles et aux équateurs de sphères et d'ellipsoïdes inscrits et circonscrits : nous omettons cette partie de la démonstration.  
 Par ailleurs, la pesanteur à l'intérieur d'un sphéroïde est comme la distance au centre (livre 1, proposition 91, corollaire 3).  
 31 - Livre 3, proposition 10 ; « *Traité d'Optique* », question 22, p 422 - 423 de la trad. Pierre COSTES, 1722.  
 32 - DESCARTES, « *Principes de la Philosophie* », 2<sup>e</sup> Partie, Article 16.

## Table des Matières

Les fondements de la physique newtonienne . . . . .	7
<i>L'espace et le temps absolus</i> . . . . .	12
La gravitation universelle . . . . .	15
<i>La loi des aires (livre 1, proposition 1)</i> . . . . .	16
<i>Le centre de force (livre 1, proposition 2)</i> . . . . .	18
<i>Valeur de la déviation</i> . . . . .	18
<i>La déviation est proportionnelle au carré du temps</i> . . . . .	18
<i>Expression de la force centripète</i> . . . . .	19
<i>L'ellipse</i> . . . . .	20
<i>La déviation de la Lune</i> . . . . .	21
<i>La 3e Loi de Kepler</i> . . . . .	23
<i>Validité de la 3e Loi de Kepler</i> . . . . .	25
<i>La gravité d'un corps augmente avec sa masse</i> . . . . .	25
Masses et densités du Soleil et des planètes.	
Pesanteurs sur leurs surfaces. . . . .	27
<i>Poids des corps sur les surfaces du Soleil, de Jupiter et de Saturne</i> . . . . .	28
<i>Densités des planètes</i> . . . . .	30
Un corps sphérique attire comme si toute sa masse était concentrée en son centre. . . . .	31
<i>Cas d'une sphère creuse</i> . . . . .	31
<i>La même sphère creuse attire un corps situé à l'extérieur</i> . . . . .	32
<i>Attraction d'une sphère pleine et homogène sur un corps placé à l'extérieur</i> . . . . .	33
<i>Deux sphères pleines et homogènes s'attirent</i> . . . . .	33
<i>Le corps P est à l'intérieur d'une sphère pleine et homogène</i> . . . . .	34
La forme de la Terre. . . . .	36
<i>Effet de la force centrifuge</i> . . . . .	36
<i>Valeur de la force centrifuge</i> . . . . .	36
<i>Déformation de la Terre</i> . . . . .	37
<i>Valeur de l'aplatissement</i> . . . . .	37

## NOTES

Je donne la pagination de l'édition de référence des *Principia* : « *Isaac Newton's Philosophiæ naturalis Principia mathematica - The third edition with variant readings assembled and edited by A. Koyre and I.B. Cohen* », Harvard University Press, 1972.

La critique des tourbillons de Descartes. . . . .	40
<i>Le Tourbillon solaire.</i> . . . . .	40
<i>Instabilité des tourbillons.</i> . . . . .	40
<i>Densité des planètes.</i> . . . . .	41
<i>Contradiction avec les Lois de Kepler.</i> . . . . .	41
<i>Tourbillons finis.</i> . . . . .	43
<i>Vitesse d'une planète à l'aphélie et au périhélie.</i> . . . . .	44
<i>Exemple de la Terre.</i> . . . . .	45
Les perturbations. . . . .	47
<i>Le centre de gravité.</i> . . . . .	47
<i>Le système de plusieurs corps.</i> . . . . .	48
<i>Composantes de la force perturbatrice.</i> . . . . .	50
<i>Conséquences de la force perturbatrice.</i> . . . . .	51
<i>Variation de la force perturbatrice.</i> . . . . .	56
Les marées océaniques. . . . .	58
<i>Force perturbatrice du Soleil sur la Lune.</i> . . . . .	60
<i>Action de la Lune sur la mer.</i> . . . . .	61
<i>La critique de Daniel Bernoulli.</i> . . . . .	62
<i>Estimation de la montée de l'eau.</i> . . . . .	63
La précession des équinoxes. . . . .	65
<i>Évaluation quantitative du phénomène.</i> . . . . .	67
Conclusion. . . . .	69
<i>L'espace absolu.</i> . . . . .	69
<i>Le temps absolu.</i> . . . . .	69
<i>La nature de la force.</i> . . . . .	70
<i>Explication mathématique ou physique ?</i> . . . . .	71
<i>Propagation instantanée de la force.</i> . . . . .	71

- 1 - « *Il est difficile de philosopher sur la nature sans géométrie* » ; « *Dialogue sur les deux grands Systèmes du Monde* », 1632, 2<sup>e</sup> journée (trad. de R. FRÉREUX, éditions Le Seuil, p 216).
- 2 - Dans une expérience effectuée entre 1676 et 1679 (selon WESTFALL) et relatée *in Principia* 1687, fin du Scholie de la section 7 (placé en fin de section 6 dans la 3<sup>e</sup> édition.
- 3 - cf « *Dialogue sur les deux grands Systèmes du Monde* », 2<sup>e</sup> journée, p 170.
- 4 - « *Le Système du Monde* », éditions Tonson, 1731, p 27.
- 5 - Pour une étude plus approfondie : voir Georges BARTHÉLÉMY, « *Newton, Mécanicien du Cosmos* », éditions Vrin.
- 6 - DESCARTES, « *Principes de la Philosophie* » (1644-1647), 3<sup>e</sup> partie, article 26.
- 7 - *Principia*, 1726, p 11.
- 8 - *Principia* 1726, p 8.
- 9 - *Principia* 1726, p 9.
- 10 - *Principia* 1726, p 11-12.
- 11 - *Principia* 1726, Scholie des définitions, p6.
- 12 - *Principia* 1726, p 8.
- 13 - *Principia* 1726, p 8.
- 14 - « *L'espace, bien loin d'être une substance, n'est pas un être. C'est un ordre, comme le temps, un ordre de coexistence, comme le temps est un ordre entre les existences qui ne sont pas ensembles* ». Cité in R. DUGAS, « *La Mécanique au XVII<sup>e</sup> siècle* », p 468.

disparaîtrait que 8 minutes plus tard, temps que met la lumière pour parvenir jusqu'à nous. La relativité lève ce paradoxe, car dans cette théorie, aucun signal ne se propage plus vite que la lumière, pas même la gravité : celle-ci se propage à une vitesse finie, celle de la lumière.

Les successeurs de NEWTON ont mis de côté les problèmes posés par la théorie de NEWTON : l'espace et le temps absolus, la nature de la force. Ils se sont consacrés au développement du formalisme mathématique dont l'efficacité n'est plus à prouver. D'ailleurs, quand les vitesses sont petites par rapport à la vitesse de la lumière, les astronomes utilisent la théorie de NEWTON : dans ce cas, elle donne le même résultat que la relativité générale, tout en simplifiant les calculs.

## LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE D'ISAAC NEWTON

La *Philosophie naturelle* est l'étude de la nature : aujourd'hui, nous parlons de *Physique*. Les *Principes mathématiques* signifient que les phénomènes naturels peuvent s'exprimer sous forme de lois mathématiques, comme l'avait dit Galilée <sup>(1)</sup>. L'objet des Principia est l'étude du mouvement des corps.

### Les fondements de la physique newtonienne

La masse ou la quantité de matière contenue dans un corps est le produit de la densité par le volume (définition 1) : on a dit que cette définition n'en est pas vraiment une, puisque la densité est la quantité de matière par unité de volume. Mais Newton admet que la matière est composée de particules ou corpuscules (les atomes de DÉMOCRITE, bien qu'il ne prononce jamais ce mot dans les *Principia*): en admettant que ces particules soient toutes identiques, la quantité de matière ou la masse d'un corps augmente avec le nombre de ces particules par unité de volume. Ainsi la définition 1 prend tout son sens, puisque la quantité de matière par unité de volume (la densité) n'est rien d'autre que le nombre de particules identiques par unité de volume.

Ces particules sont séparées par du vide, à moins que l'espace soit occupé par l'éther dont Newton déclare ne pas tenir

compte. En effet, l'éther devrait opposer une résistance, non seulement sur la surface des corps, mais aussi à l'intérieur des corps (puisque cet éther, selon DESCARTES et HUYGENS, doit pénétrer librement à l'intérieur des corps). Or, l'expérience ne confirme pas une telle résistance <sup>(2)</sup>. Donc, les particules et les corps qu'elles constituent se déplacent dans le vide, ou dans des milieux fluides eux-mêmes composés de particules.

La matière est inerte, passive : laissé à lui-même, un corps reste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme (1<sup>ère</sup> Loi) : c'est le *Principe de l'Inertie*, ou l'équivalence du repos et du mouvement rectiligne uniforme. Un corps ne modifie pas de lui-même son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, seule une force imprimée peut le faire (définition 4 et 2<sup>e</sup> Loi).

En effet, un corps a la proportionnalité de s'opposer au changement de son état de repos ou de mouvement (définition 3). NEWTON qualifie cette proportionnalité de « force » et l'appelle « vis insita », c'est-à-dire « force inhérente à la matière » ; il lui donne aussi le nom de « force d'inertie ». Cette force se présente sous deux aspects : la *résistance*, par laquelle le corps s'oppose à la force qui cherche à le mettre en mouvement s'il était au repos, ou à accélérer son mouvement s'il est déjà en mouvement ; et l'*impulsion*, par laquelle un corps en mouvement cherche à modifier l'état de repos ou de mouvement de l'obstacle qui s'interpose.

La force imprimée consiste en l'action seule : NEWTON pense ici à une force qui agit de façon instantanée, par exemple, lors d'un choc : le corps conserve ensuite son nouvel état du fait de son inertie. Par exemple, le corps est au repos : la force agit (en un instant), et le corps se meut sur une droite, dans la direction où a été imprimée la force (2<sup>e</sup> Loi). Mais si le corps était auparavant en mouvement rectiligne uniforme : après l'impression de la force, le mouvement primitif du corps se compose avec le mouvement que la force aurait produit seule (suivant la direction où elle a été imprimée). Ainsi, le corps décrira la diagonale du parallélogramme qu'on peut tracer à

et agisse selon les lois qu'il a déterminées <sup>(50)</sup>. Cette attitude est celle de ses successeurs.

L'attitude ambiguë de NEWTON se retrouve chez LAPLACE : « *La nature de cette modification singulière en vertu de laquelle un corps est transporté d'un lieu dans un autre est et sera toujours inconnue. Elle a été désignée sous le nom de force : on ne peut déterminer que ses effets et la loi de son action* » <sup>(51)</sup>.

LAPLACE renonce à chercher une cause à la gravité et s'en tient à l'explication du comment des choses. Mais il affirme par ailleurs : toutes les molécules de la matière s'attirent mutuellement, en raison des masses, et réciproquement au carré des distances <sup>(52)</sup>.

### ***Explication mathématique ou physique ?***

La force d'attraction n'est-elle qu'une « astuce » mathématique destinée à une explication quantitative des phénomènes ? En appliquant cette loi au Système solaire, NEWTON traite des corps réels, ceux de la Terre et des astres. Par ailleurs, on peut considérer la troisième loi comme la transition entre l'explication mathématique et l'explication physique : dire que je suis attiré vers le centre de la Terre peut n'être qu'une explication purement mathématique. Mais parler d'une attraction mutuelle entre la Terre et moi nous ramène bien dans le monde physique, dans notre monde quotidien, puisque je suis impliqué (en tant que masse) dans le processus d'attraction.

### ***Propagation instantanée de la force.***

La théorie newtonienne ne fonctionne que si la force agit sans délai entre les corps en interaction, quelle que soit la distance qui les sépare. L'attraction du Soleil se communique dans un instant presque indivisible aux extrémités du Système solaire <sup>(53)</sup>.

Par exemple, si le Soleil disparaissait au temps  $t_0$ , la Terre prendrait aussitôt la tangente mais pour nous, le Soleil ne



**La nature de la force.**

Newton ne précise pas la nature de la force d'attraction. L'action à distance est rejetée catégoriquement par les Cartésiens, en particulier par HUYGENS et par LEIBNIZ qui voient en elle un retour aux causes occultes.

NEWTON prétend ne pas rechercher l'espèce de ces forces ni leurs qualités physiques mais leurs quantités et leurs proportions mathématiques<sup>(43)</sup>. Il affirme s'exprimer en mathématicien. Le lecteur ne doit pas prendre à la lettre les expressions suivantes : les centres attirent, les forces appartiennent aux centres<sup>(44)</sup>, les points d'un corps attirent<sup>(45)</sup>, les particules d'un corps attirent<sup>(46)</sup>, etc. Pourtant, le lecteur ne peut s'empêcher d'interpréter ces termes d'une manière physique et finit par attribuer une force attractive à toutes les particules de matière.

D'ailleurs, NEWTON lui-même eut cette attitude : dans certains écrits, il établit une analogie entre le microcosme et le macrocosme. La matière est conforme à elle-même, dit-il ; elle doit donc régler les mouvements des particules (les atomes ou les molécules de la physique moderne) de la même façon que les mouvements des grands corps, au moyen de forces attractives.

Mais il ne se prononce pas sur la nature de cette force : ce que j'appelle ici *attraction*, peut-être produit par impulsion, ou par d'autres moyens qui me sont inconnus<sup>(47)</sup>. L'attraction est l'effort des corps pour se rapprocher : une tendance des corps les uns vers les autres, ou une action des corps les uns sur les autres par l'émission d'Esprits, ou par l'action de l'éther ou d'un milieu corporel ou incorporel<sup>(48)</sup>.

Ailleurs, il parle du rapprochement des corps provenant d'une nature conspirante de la matière ou de force provenant de la nature universelle de la matière<sup>(49)</sup>. NEWTON laisse son lecteur libre de choisir sa propre cause pour la gravité.

Dans le *Scholie* général des *Principia*, NEWTON adopte une attitude pragmatique : il lui suffit de savoir que la gravité existe

partir de la droite du mouvement inertiel et de la droite du mouvement dû à la force (corollaire 1 des Lois).

Le changement de l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme est proportionnel à la force imprimée (2<sup>e</sup> Loi). On peut l'exprimer en écrivant : *F proportionnel à accélération*. L'accélération est le changement de vitesse, ou le changement de direction, ou les deux à la fois. Pour un même corps, une accélération plus grande traduit une force imprimée plus importante. C'est ce que Newton appelle la quantité accélératrice de la force (définition 7).

Pour être plus précis, l'expression de la force doit prendre en compte la masse du corps qui subit l'action : la quantité motrice de la force, nous dit NEWTON, est proportionnelle, au « mouvement » qu'elle produit (définition 8). Mais par « mouvement », il faut comprendre ici la « quantité de mouvement », c'est-à-dire le produit de la masse par la vitesse (définition 2) : la force est donc proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle produit (si le corps est au repos) ou qu'elle modifie (si le corps est déjà en mouvement), c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle au produit de la masse par l'accélération (qui est le changement de la vitesse). On obtient la formule : *force = masse x accélération*, qui est aussi celle du poids, puisque le poids d'un corps est l'accélération de sa masse due à la gravité.

Il existe plusieurs sortes de forces imprimées : les unes agissent de façon instantanée, comme le choc, les autres de façon continue, comme la pression. Un autre genre de force continue est la gravité, que NEWTON classe parmi les forces centripètes, celles qui attirent les corps vers un centre (définition 5). L'action à distance embarrasse NEWTON : certes, la force magnétique offre un exemple de force centripète agissant à distance, sans contact matériel. Mais comment s'opère cette action à distance ? NEWTON parle vaguement d'une propension vers un centre.

La force centripète permet d'expliquer le mouvement circulaire uniforme : à chaque instant, le corps en révolution est

détourné de son trajet inertiel par la force centripète. Il prend l'exemple d'un canon qui tire un boulet (dans la définition 5, 3<sup>e</sup> édition). Au moment du tir, le boulet part tout droit (en l'occurrence, à l'horizontale), à vitesse constante (en faisant abstraction de la résistance de l'air). Mais à chaque instant, l'action de la gravité le détourne de son trajet rectiligne et l'attire vers le bas. Le boulet décrit un arc de courbe avant de retomber sur le sol (fig. n°1).

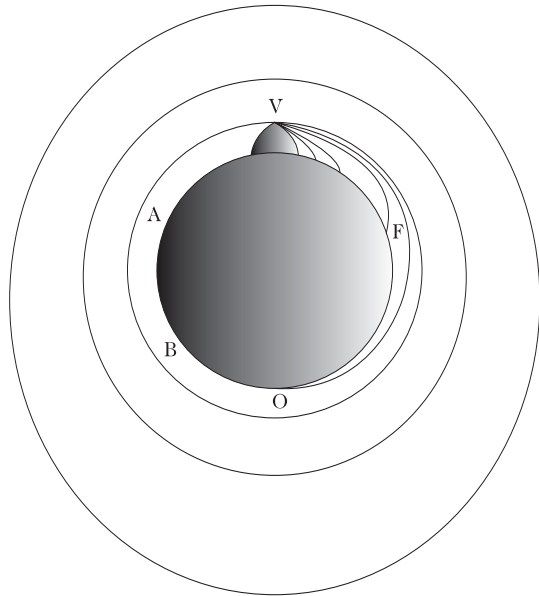


Figure 1

NEWTON reprend la démonstration de GALILÉE (cf. Scholie des Lois) et l'étend aux mouvements des corps célestes : en effet, si on donne au boulet de canon une vitesse suffisante, il ne retombera pas et fera le tour de la Terre (du moins si on supprime tous les obstacles devant lui). Le mouvement de la Lune s'analyse de la même manière. Le mouvement circulaire uniforme est donc un mouvement continuellement accéléré, contrairement à ce que croyait Galilée <sup>(3)</sup>. Certes, la vitesse est constante, mais la direction change constamment.

## Conclusion.

L'explication du Système du Monde montre la fécondité de la physique newtonienne. La mesure de l'aplatissement de la Terre (expédition française au Pérou et en Laponie en 1735) et la prévision du retour de la comète de HALLEY ont consacré la validité de la physique de NEWTON. Pourtant, certains fondements de cette physique sont sujets à caution.

### *L'espace absolu.*

Certains contemporains de NEWTON critiquent les notions d'espace et de temps absolus. Mais un siècle plus tard, Pierre-Simon LAPLACE conserve les absolus newtoniens : tous les mouvements, dit-il, sont relatifs parce qu'on les rapporte à des lieux mobiles. Pour arriver enfin à des points fixes d'où l'on puisse compter le mouvement absolu des corps, on imagine un espace sans borne, immobile et pénétrable à la matière. C'est aux parties de cet espace réel ou idéal que nous rapportons, par la pensée, la positions des corps <sup>(42)</sup>.

Depuis EINSTEIN, la physique moderne a abandonné cet espace absolu. Les mouvements dans le Système solaire, par exemple, sont repérés par un trièdre constitué par trois lignes partant du centre de gravité du système et se dirigeant vers trois étoiles de notre galaxie (qu'on suppose immobiles).

### *Le temps absolu.*

De même, la physique moderne ne croit plus au temps absolu. Le temps est l'ordination des évènements faite par un observateur, qui se réfère à des phénomènes aussi réguliers que possible (les horloges atomiques, par exemple). De plus, on sait (en relativité) que des observateurs en mouvements les uns par rapport aux autres ne s'accordent pas sur la durée d'un même phénomène : leurs mouvements affectent la mesure du temps (relativité).

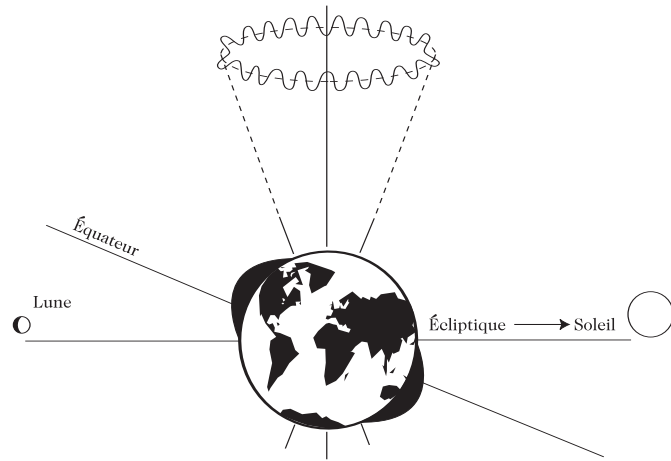


Figure 28

plus important que celui du Soleil : en prenant cette valeur, le mouvement total des équinoxes n'est plus que de 32". La méthode de NEWTON est donc incorrecte et doit être revue (41).

La loi de l'égalité de l'action et de la réaction est la plus célèbre des trois lois : la réaction est toujours contraire et égale à l'action. Mais il faut bien comprendre de quoi il s'agit. Quand deux corps agissent l'un sur l'autre, la quantité de mouvement d'un des corps est égale à celle de l'autre, mais leurs vitesses sont inversement comme leurs masses : dans un coup de fusil, les quantités de mouvement de la balle et du fusil sont égales. Mais la vitesse de la balle est très grande parce que sa masse est petite, tandis que le recul du fusil est faible, parce que sa masse est plus grande. Il en est de même dans les attractions.

Il le montre dans l'exemple des parties de la Terre (Scholie des Lois, 3<sup>e</sup> édition). Supposons que la Terre (homogène) soit divisée en deux parties EGF et EGI (fig. n°2) : les poids de ces parties seront égaux. En effet, divisons la plus grande partie EGI en deux parties, HKI et EGKH, en sorte que la partie HKI soit égale à la partie EGF. La partie intermédiaire EGKH ne tend vers aucune des parties EGF et HKI, mais elle reste au repos entre elles. La partie HKI pèse sur la partie EGKH et la pousse vers la partie EGF. Mais la force par laquelle la somme EGI des parties HKI et EGKH tend vers la 3<sup>e</sup> partie EGF est égale au poids de la partie HKI, c'est-à-dire au poids de la partie EGF. Sinon, la plus forte pression l'emporterait et la Terre s'en irait du côté de cette plus forte pression.

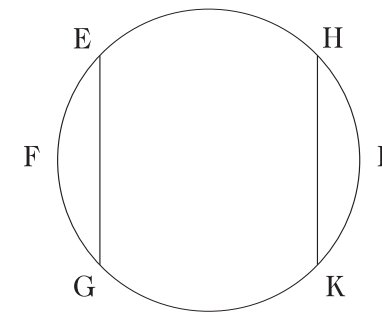


Figure 2

Cet exemple est une application de l'égalité de l'action et de la réaction: dans une ébauche des *Principia* <sup>(4)</sup>, NEWTON précise que, séparées, ces parties tomberaient l'une vers l'autre avec des vitesses inversement proportionnelles à leurs masses. Puis il imagine qu'une partie soit réduite à la taille d'un corps placé sur la Terre. Le poids de cette particule vers la Terre est égal au poids de la Terre vers cette particule.

On peut l'illustrer comme suit. La Terre attire une pierre placée sur sa surface ; la masse de la bille est égale à 1 kg ; la Terre produit une accélération égale à  $9,8 \text{ m/s}^2$  (résultat expérimental).

Calculons l'accélération due à la masse de la pierre : la force varie avec la masse. Comme la masse de la Terre est égale à 1024 kg, l'accélération due à la pierre sera  $10^{24}$  plus petite et donc égale à  $9,8 \text{ m} / (6 \times 10^{24})$  ou  $1,6333 \times 10^{-24} \text{ m/s}$ .

Poids = masse x accélération.

Poids de la bille sur la Terre :  $1 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s} = 9,8 \text{ N}$ .

Poids de la Terre sur la bille :  $6 \times 10^{24} \times 1,6333 \times 10^{-24} = 9,8 \text{ N}$ .

Les poids de la bille et de la Terre sont égaux.

### L'espace et le temps absolus

Les trois lois de NEWTON <sup>(5)</sup> prennent tout leur sens dans l'espace et le temps absolus. Nous avons l'habitude de repérer nos mouvements quotidiens par rapport à la surface terrestre, que nous supposons immobile même si nous savons que la Terre bouge. De même, nous repérons les mouvements des planètes par rapport aux étoiles lointaines qu'on suppose fixes. La relativité des mouvements est valable pour des translations rectilignes uniformes (équivalence du repos et du mouvement inertiel). Mais DESCARTES généralise cette relativité aux mouvements circulaires, qui sont des mouvements accélérés.

Par exemple, DESCARTES dit que la Terre est emportée par le *tourbillon* de son ciel tout en étant au repos dans son ciel : « elle n'a point de propension au mouvement, vu que nous n'en

plus faible que l'efficacité de l'anneau pour faire basculer la Terre. NEWTON estime que le mouvement des nœuds est ainsi divisée par 2,5 (lemme 1) :

• *mouvement des équinoxes* =  $1/2924 : 2,5 = 1/7310$ .

Le mouvement des équinoxes est donc la 7310<sup>e</sup> partie du mouvement des nœuds de la Lune et est donc de 10'' en une année sidérale. Comme la force de la Lune est 4,5 fois plus forte, le mouvement des équinoxes dû à la Lune st de 45''. La somme des deux mouvements est de 55''.

Cependant, l'efficacité de la force perturbatrice, pour faire rétrograder les équinoxes, est proportionnelle à la distance du point *E* par rapport à la perpendiculaire *CD* au plan de l'écliptique. Or, cette distance est diminuée par l'inclinaison de l'équateur *EE'* sur l'écliptique, et est égale au rayon de la Terre multiplié par le cosinus de cette inclinaison, c'est-à-dire au cosinus de  $23^{\circ}1/2$ , ou à 0,91706. Le mouvement des équinoxes doit donc être diminué dans cette proportion et est donc égal à 50'', ce qui est la valeur donnée par l'observation.

En fait, Newton surestime l'effet de la Lune qui est 2,2 fois

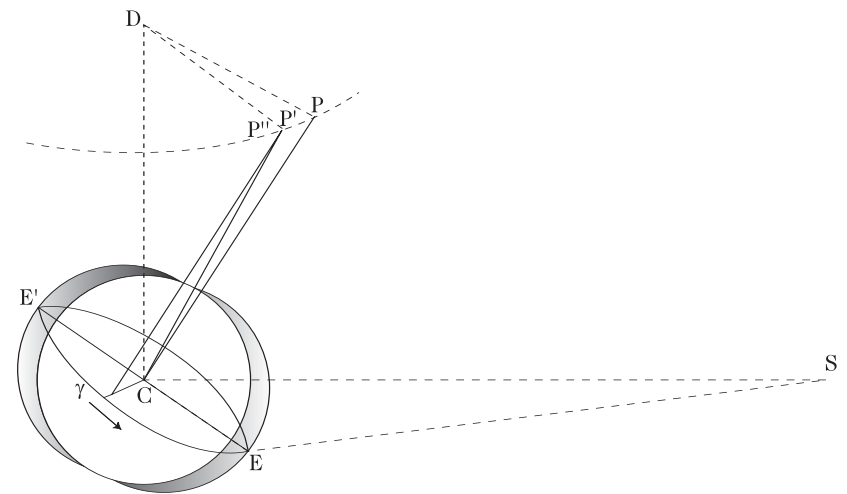


Figure 27

**Évaluation quantitative du phénomène.**

Newton commence par assimiler le bourrelet équatorial de la Terre à un anneau qu'il suppose indépendant de la Terre. Puisque les nœuds de l'orbite lunaire (supposée circulaire) rétrogradent de  $20^{\circ} 11' 46''$  en une année sidérale (livre 3, proposition 30), les nœuds de cet anneau doivent rétrograder en 45 minutes à peu près.

En effet, la force perturbatrice du Soleil sur cet anneau est plus faible que sur la Lune : NEWTON trouve que les périodes de rétrogradation des nœuds de l'anneau et de la Lune sont comme les périodes de révolutions sidérales de l'anneau et de la Lune (livre 1, proposition 66, corollaire 16), c'est-à-dire comme un jour sidéral (pour l'anneau) à 27 jours sidéraux (pour la Lune):

$$45' / 20^{\circ} 11' 46'' = 23 \text{ h } 56 \text{ min} / 27 \text{ j } 7 \text{ h } 43 \text{ min} = 1 / 27,4$$

NEWTON compare la surface d'une tranche équatoriale de la Terre sphérique de rayon  $R = 229$  à la surface de l'anneau, celle-ci étant la différence entre la tranche équatoriale de l'ellipsoïde terrestre et la tranche équatoriale de la sphère terrestre :

$$R^2_{\text{Terre}} / R^2_{\text{Terre-anneau}} = 229^2 / 230^2 - 229^2 = 114,25 / 1$$

Newton trouve ensuite que le mouvement de basculement de la Terre (de l'équateur vers l'écliptique) est au mouvement de basculement de l'anneau (dans le même sens) comme 1 à 0,925275 (lemme 3) :

$$1 / 114,25 \times 1 / 0,925275 = 1 / 105,71.$$

NEWTON trouve ensuite que le rapport du mouvement des nœuds de l'anneau au mouvement des nœuds de l'ellipsoïde terrestre (réduit à sa tranche équatoriale) est comme le rapport de leurs mouvements de basculement, c'est-à-dire comme le rapport de leurs surfaces, c'est-à-dire comme  $1$  à  $105,71 * 1 = 1 / 106,71$ .

Enfin :

- *mouvement des nœuds de l'anneau / mouvement des nœuds de la Lune (égal à  $20^{\circ} 11' 46''$ )*  
 $= 1 / 2,47 \times 1 / 106,71 = 1 / 2924.$

Mais l'efficacité du bourrelet (réparti sur tout le globe) est

remarquons point en elle » <sup>(6)</sup>. Newton lui rétorque ceci : la Terre et les parties du tourbillon sont certes au repos relatif les unes par rapport aux autres, mais elles font un effort centrifuge pour s'éloigner du centre de leur mouvement circulaire, et elles sont donc en mouvement absolu <sup>(7)</sup>.

NEWTON rejette l'opinion de DESCARTES. Il parle d'un espace absolu, invisible, sans relation avec quoi que ce soit d'extérieur (Scholie des définitions). L'ordre des parties de cet espace absolu est immuable <sup>(8)</sup>.

Les mouvements absolus se rapportent à cet espace. Certes, admet-il, on doit se contenter de repères extérieurs suffisamment immobiles pour repérer nos mouvements.

Prenons un exemple, celui d'un bateau. Si le bateau se déplace avec un mouvement rectiligne uniforme (admettons qu'il le puisse), un marin placé à bord pourrait croire que le bateau est immobile et que le rivage s'éloigne de lui : la physique ne permet pas de discerner le repos du mouvement rectiligne uniforme. Mais si le bateau heurte un écueil, son mouvement est changé par la résistance du rocher : le bateau s'arrête, le marin est déporté en avant. Le changement de mouvement (par une force) permet de dire que c'est bien le bateau qui se déplaçait, et ce, non seulement par rapport à la surface de la mer, mais par rapport à l'espace absolu.

Le bateau est à quai : il est immobile seulement par rapport à la Terre. Car il participe à la rotation de la Terre, à sa révolution autour du Soleil, à la translation éventuelle du Soleil qui entraîne les planètes avec lui, etc. Donc, il est mobile par rapport à l'espace absolu.

Cet exemple nous permet de comprendre comment discerner un mouvement purement relatif d'un mouvement absolu : une force est nécessaire pour modifier un mouvement absolu et un mouvement absolu produit une force <sup>(9)</sup>. Notre bateau fait partie d'un convoi : tous se déplacent ensemble et sont donc au repos les uns par rapport aux autres. Si les autres bateaux se mettent à aller plus vite (en déployant plus de voiles) alors que le nôtre conserve sa vitesse, notre bateau n'est plus au

repos par rapport aux autres : son repos relatif est modifié sans qu'une force lui soit directement imprimée. Par contre, si le vent souffle de plus en plus fort, tous les bateaux du convoi sont accélérés de la même façon : la position des navires les uns par rapport aux autres n'a pas changée, ils restent au repos les uns par rapport aux autres, et pourtant, le mouvement du convoi est continuellement accéléré par la force du vent. Le repos relatif n'implique pas le repos absolu.

NEWTON s'intéresse au mouvement circulaire ; aussi, prend-il l'exemple de deux sphères reliées par une corde en rotation l'une autour de l'autre, dans un espace absolument vide, à l'exception de quelques étoiles fixes et lointaines<sup>(10)</sup>. Les sphères sont en rotation et les étoiles sont fixes, ou bien les sphères sont immobiles et les étoiles bougent : d'un point de vue relatif, ces deux mouvements sont équivalents.

Mais examinons la corde : la tension de la corde indique un effort des sphères pour s'éloigner l'une de l'autre (effet centrifuge) et cette force traduit le mouvement absolu des sphères dans l'espace. Les mouvements relatifs ne sont que les différences des mouvements absolus. Si les étoiles ne sont plus immobiles, et si elles se déplacent dans le même sens que les sphères (ou en sens contraire), le mouvement absolu des sphères ne sera pas changé mais leur vitesse relative par rapport aux fixes sera diminuée (ou augmentée).

Nous avons vu que dans le mouvement circulaire uniforme, le corps est continuellement détourné de son trajet rectiligne uniforme par une force dirigée vers le centre du cercle. L'effort centrifuge, ou la force centrifuge, traduit l'inertie du corps, sa résistance à la force centripète, son effort pour continuer son mouvement rectiligne uniforme.

La force centripète produit un mouvement absolu (le mouvement circulaire) et ce mouvement absolu produit une force (l'effort centrifuge). La force est donc toujours absolue alors que le mouvement peut être absolu ou relatif.

La relativité galiléenne montre que les mouvements dans un espace sont les mêmes, que cet espace soit au repos ou en

## La précession des équinoxes.

Ce phénomène a été découvert par HIPPARQUE en 129 avant notre ère et est resté une énigme jusqu'à l'explication fournie par NEWTON (livre 3, proposition 39).

La Terre est aplatie aux pôles et renflée à l'équateur: le Soleil exerce une force perturbatrice sur le bourrelet équatorial de la Terre. Ce bourrelet est incliné de  $23^{\circ} 1/2$  sur le plan de l'écliptique où se trouve le Soleil : le plan de l'équateur (perpendiculaire à l'axe de rotation) rencontre le plan de l'écliptique en deux points, désignés par les lettres grecques *gamma* et *gamma'* ( $\gamma$  et  $\gamma'$ ). Ces points marquent les équinoxes.

Par la seule force de gravité, le centre de la Terre décrit une orbite autour du Soleil *S* en une année sidérale : l'orbite est décrite par le rayon vecteur *CS* (fig. n°27 et 28). Le point équatorial *E* est plus proche du Soleil que le point *E'* qui lui est opposé : la force perturbatrice exerce un effet de couple sur l'axe *ECE'*, en attirant davantage le point *E* que le point *E'*, le centre *C* de la Terre jouant en quelque sorte le rôle de pivot.

Cette force perturbatrice cherche donc à ramener le point *E* dans le plan de l'écliptique, donc à diminuer l'inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique. Elle y parviendrait sans la rotation axiale de la Terre, par laquelle la Terre résiste à cette action. Les deux mouvements se composent : l'axe *CP* de la Terre recule de *P* en *P'*, puis en *P''* et décrit ainsi un cône de précession de  $47^{\circ}$  d'ouverture, c'est-à-dire le double de l'inclinaison de  $23^{\circ} 1/2$ . Le point  $\gamma$  sur l'équateur recule aussi, de  $\gamma$  en  $\gamma'$ , de  $50''$  par an. Le point gamma fait donc un tour complet en quelques 26 000 ans.

La force perturbatrice du Soleil agit quand le Soleil est au-dessus de l'équateur (avec un maximum aux solstices d'hiver et d'été). Aux équinoxes, le Soleil est dans le plan équatorial et sa force perturbatrice n'agit pas. L'action de la Lune se conjugue avec celle du Soleil.

- effet du Soleil sur la mer / Pesanteur = 1 / 12 868 240
- effet du Soleil / force centrifuge  
 $1 / 12\ 868\ 240 / 1 / 289 = 1/44\ 526$

Par conséquent, les eaux placées sous le Soleil ou à l'opposé du Soleil dépassent en hauteur les eaux placées à 90° de  $21\ 400\ m / 44\ 526 = 0,48m$ .

L'action de la Lune élève les eaux de 0,48m x 2,18 ou de 1,0464 m. L'effet cumulé des 2 astres élève les eaux de 1,5264 m (corollaire de la proposition 36).

La valeur réelle doit être un peu plus faible car il s'agit de l'effet de marée maximal sur la Terre supposée totalement recouverte d'eau.

translation rectiligne uniforme (corollaire 5 des lois) : pensez aux mouvements dans notre bateau. De même, la déviation d'un corps par rapport à sa trajectoire inertielle est la même, que le système du corps central et du corps dévié soit au repos ou en translation rectiligne uniforme (livre 1, proposition 1, corollaire 4).

Le temps absolu est une nécessité : il est impératif que l'unité de temps soit invariable pour mesurer des durées, des vitesses, etc. : c'est pourquoi le flux du temps est constant; « le temps coule uniformément »<sup>(11)</sup>. Le temps n'est pas affecté par la rapidité ou la lenteur des mouvements<sup>(12)</sup>.

Le temps sert de mesure pour quantifier les évènements, mais il sert aussi de cadre à la succession de ces évènements (temps de la chronologie) : l'ordre des parties du temps est immuable<sup>(13)</sup>. Pour rester dans la physique, la vitesse d'un objet se calcule par rapport à une unité définie de durée (la seconde, par exemple) et aussi par rapport à une séquence (la vitesse à tel instant de la chute ou « vitesse instantanée »).

L'espace et le temps absolus sont aussi les *attributs de Dieu*. Dieu est présent partout et il dure toujours, et ce faisant, il constitue l'espace et la durée (Scholie général des *Principia*). Pour NEWTON, l'espace et le temps existent indépendamment de la matière : pour LEIBNIZ, l'espace et le temps sont les conséquences de l'existence de la matière. L'espace et le temps se mesurent par rapport aux objets matériels : l'espace est l'ordre de la coexistence des objets matériels et le temps est l'ordre de leur succession<sup>(14)</sup>.

## La gravitation universelle

D'après ce qu'on vient de dire, il est clair que dans l'espace vide, une planète est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme si aucune force n'agit sur elle. L'action d'une force la met en mouvement vers le point où cette force est dirigée. La planète tombe tout droit vers ce point si elle n'a pas de vitesse proportionnelle ; ou bien, si la planète a une vitesse proportionnelle, la force la détourne de son trajet inertiel, en direction

de ce même point : la planète décrit alors une trajectoire résultant de la composition de son mouvement de translation avec son mouvement de chute.

Le problème consiste à évaluer cette chute due à la force centripète.

**La loi des aires (livre 1, proposition 1).**

Le centre de force est en *S* le corps se trouve en *A* (Fig. n°3) : si aucune force n'agit sur lui, il est au repos ou bien en mouvement rectiligne uniforme. Dans ce cas, il décrit les lignes égales *AB* et *Bc* durant des intervalles de temps égaux. Les triangles *ASB* et *BSc* ont la même surface, car ils ont la même base *SB* et la même hauteur.

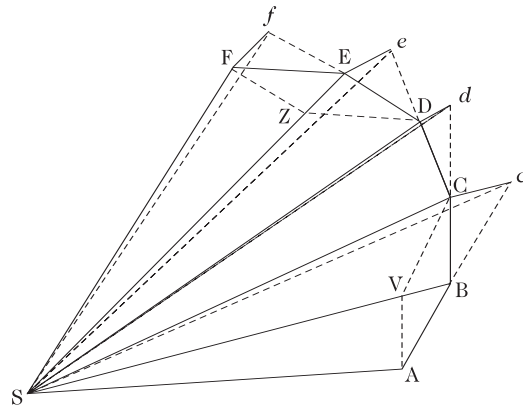


Figure 3

Mais quand il se trouve en *B*, la force centripète agit sur lui par une impression unique et instantanée : le mouvement de chute en direction de *S* se compose avec le mouvement inertiel du corps (selon la règle du parallélogramme énoncée dans le corollaire 1 des lois) ; le corps ne va plus en *c* mais il aboutit en *C*.

retard des marées sur le passage de la Lune au méridien est de 5 heures à Plymouth et de 6 heures à Bristol (pour la pleine mer).

Après diverses considérations, Daniel Bernoulli aboutit à un effet lunaire deux et demi fois plus important que l'effet solaire.

Si on connaît les masses du Soleil et de la Lune, on peut déterminer facilement le rapport de leurs effets. On pose :

- masse Terre = 1 ; masse Lune = 1 / 81,5 ;
- masse Soleil = 333 442.
- distance Terre - Lune = 1 ; distance Terre - Soleil = 390.

L'effet de marée croît avec la masse et décroît avec le cube de la distance.

*masse Soleil/masse Lune :*

$$(distance\ Terre - Soleil)^3 / (distance\ Terre - Lune)^3$$

ou  $333\ 342 / (1/81,5) : 3903/13 = 0,458 = 1/2,18$ .

La force totale du Soleil pour mouvoir la mer est 1 / 12 868 240, la pesanteur étant prise pour unité. La force totale de la Lune, 2,18 fois plus forte, est donc égale à 1 / 5 092 862.

Un corps de 100 kg perd donc 16,64 mg à cause de la Lune. Quand les actions du Soleil et de la Lune s'ajoutent, ce corps de 100 kg perd 24,71 mg.

La force de marée n'est sensible que sur les grandes masses océaniques.

**Estimation de la montée de l'eau.**

On suppose que la Terre est entièrement recouverte d'eau, formant un ellipsoïde. Comme nous l'avons vu, le rayon équatorial de la Terre dépasse le rayon polaire de 21400 mètres (27 690 mètres selon les calculs de NEWTON).

La force centrifuge est maximale à l'équateur et y est 289 fois plus faible que la pesanteur. NEWTON conjugue l'effet de la force centrifuge (qui crée l'ellipsoïde terrestre) avec l'effet de marée dû au Soleil placé à l'équateur (qui crée aussi l'ellipsoïde marin):



partir des variations de la hauteur de la mer dans les ports anglais. Quand la Lune est en conjonction ou en opposition avec le Soleil (c'est-à-dire en phases de nouvelle Lune et pleine Lune), son action s'ajoute à celle du Soleil. On peut écrire :  $L + S$ . Quand la Lune est en quadrature (c'est-à-dire aux quartiers), son action se retranche de celle du Soleil. On peut écrire :  $L - S$ . NEWTON envisage l'action du Soleil et de la Lune quand les deux astres sont dans le même plan, c'est-à-dire aux équinoxes (là où leurs actions sont maximales).

Près de Bristol, à l'embouchure du fleuve Avon, la montée de l'eau est, au printemps et à l'automne, de 45 pieds ou 14,58 mètres aux syzygies, et de 25 pieds ou 8,1 mètres aux quadratures.

On a donc le rapport suivant :

$$L + S / L - S = 45 / 25 = 9 / 5.$$

Dans le port de Plymouth, on trouve à peu près le même rapport.

On en déduit  $L$  et  $S$  :

$$(9 + 5) / 2 = 14 / 2 = 7. \text{ D'où } L = 7 \text{ et } S = 2.$$

En effet,  $L + S = 7 + 2 = 9$  et  $L - S = 7 - 2 = 5$ .

La force de marée de la Lune est trois fois et demi plus importante que celle du Soleil. Compte tenu des variations dans les positions des deux astres et des différentes inégalités lunaires, le rapport  $L / S$  devient  $9 / 2$ . L'effet de la Lune est donc quatre fois et demie plus important que celui du Soleil (livre 3, proposition 37). NEWTON en déduit la masse de la Lune, qu'il trouve 39 fois plus faible que celle de la Terre (proposition 37, corollaire 3).

### La critique de Daniel BERNOULLI.

Daniel BERNOULLI (1700-1782) montra que la méthode de NEWTON n'est pas recevable. En effet, les marées dans les ports de la Manche et du Canal Saint George (qui débouche sur la Mer d'Irlande) ne sont pas dues directement aux actions du Soleil et de la Lune, mais sont dues aux marées de l'Océan Atlantique. Le

La petite ligne  $Cc$  mesure sa déviation par rapport à sa trajectoire inertielle. Les triangles  $BSc$  et  $BSC$  ont la même surface : ils ont une base commune  $SB$  et leurs sommets  $c$  et  $C$  sont sur une même parallèle à  $SB$  ( $cC$  est parallèle à  $SB$ ).

L'aire décrite par le corps durant son mouvement inertiel relativement au centre  $S$  est égale à l'aire décrite par le corps sous l'influence d'une force centripète issue de  $S$ . De même, la force agit par une impression unique et instantanée aux points  $B, C, D, E$ , etc, durant les temps égaux  $t1, t2, t3, t4, t5$ , etc. : on montre de la même manière que les aires  $BSC, CSD, DSE, ESF$ , etc., sont égales. C'est la *loi des aires*.

NEWTON passe de l'action discontinue de la force en des instants successifs à une action continue en augmentant à l'infini le nombre des triangles et en diminuant leurs surfaces à l'infini ; l'intervalle de temps entre les impressions successives diminue à l'infini, le nombre de ces impressions augmente à l'infini : la ligne brisée  $MNPQR$  devient une ligne courbe (fig. n°4).

Nous reconnaissons la 2<sup>e</sup> Loi de KEPLER selon laquelle le rayon vecteur (ligne reliant le Soleil à une planète) balaie des aires égales en des temps égaux.

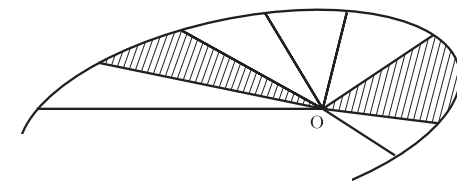
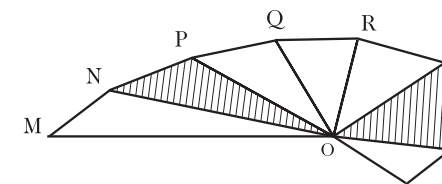


Figure 4

**Le centre de force** (livre 1, proposition 2).

Dans la figure n°2, la force agit en *B* selon la ligne *Cc* parallèle à la ligne *SB*; en *C*, elle agit selon la ligne *Dd* parallèle à la ligne *SC*; et ainsi de suite. La force tend toujours vers le point *S* qui est le centre d'où émane la force centripète qui fait tendre le corps vers *S* comme vers un centre (définition 5). La déviation se fait suivant la droite selon laquelle est imprimée la force (2<sup>e</sup> loi).

**Valeur de la déviation.**

En *C*, la déviation est égale à la ligne *Cc* ; en *D*, elle est égale à la ligne *Dd*; et ainsi de suite. En chute libre depuis *B*, le corps décrirait en tombant vers *S* et durant le même intervalle de temps une ligne égale à la ligne *Cc* (ou à la ligne *Dd* en tombant depuis le point *C*). La déviation est donc la quantité dont est tombé le corps quand il décrit la ligne *Bc*, ou *Cd*, etc. Cette déviation est proportionnelle à la force centripète (2<sup>e</sup> loi).

**La déviation est proportionnelle au carré du temps.**

GALILÉE a découvert que les espaces *e* décrits par un corps en chute libre sont proportionnels aux carrés des temps *t*, ce qui s'écrit comme ceci : *e* proportionnel à *t*<sup>2</sup>.

NEWTON démontre ceci en utilisant sa *Méthode des premières et dernières raisons* (livre 1, lemme 10) : sur une droite, on représente les temps par les segments *AD* et *AE* (fig. n°5). Les ordonnées *BD* et *CE* représentent les vitesses produites par la force aux instants *D* et *E*. La fluxion des ordonnées *BD* et *CE*, qui représentent la variation de la vitesse entre les instants *D* et *E*, engendre les surfaces curvilignes *ABD* et *ACE*. Ces surfaces représentent les espaces décrits sous l'influence de la force. Quand les points *A*, *B* et *C* coïncident, ces figures curvilignes se confondent avec les triangles *ABD* et *ACE*, lesquels sont proportionnels aux carrés des côtés *BD* et

comparer avec une attraction 3600 fois plus puissante, car la surface de la mer (ou de la Terre) est 60 fois plus proche que la Lune du centre de la Terre. En fait, cette distance est 60,2 au lieu de 60.

$$\text{Force moyenne } LM / \text{ pesanteur} = 1 / 178,725 \times 1 / 3600 \times (60,2)/60 = 1/641\ 272.$$

Ceci est la valeur de la composante *LM* de la force perturbatrice que le Soleil exerce sur la Lune, quand celle-ci est en quadrature : cette composante est la 641 000<sup>e</sup> partie de la pesanteur. Aux syzygies, la force perturbatrice du Soleil est multipliée par 2 et est donc égale à 1/320 636.

Mais à la surface de la mer, la force perturbatrice du Soleil est 60,2 fois plus faible, car l'importance de la distance Soleil-Lune diminue par rapport à la distance Terre-Soleil : en quelque sorte, une particule d'eau sur la mer est comme une Lune ramenée à la surface de la mer :

$$\text{Force moyenne } LM' / \text{ Pesanteur} = 1/38\ 604\ 574$$

C'est la valeur de la force perturbatrice du Soleil placé aux quadratures, c'est-à-dire à 90° d'un point de la surface de la mer. Pour les eaux situées sous le Soleil et à l'opposé du Soleil, la force perturbatrice est 2 fois plus grande, et approximativement égale à la 20 000 000<sup>e</sup> partie de la pesanteur (1/19 302 287).

La force perturbatrice du Soleil, ou la force de marée du Soleil, abaisse les eaux situées à 90° du Soleil car elle y renforce la pesanteur; elle élève les eaux situées sous le Soleil ou à l'opposé (à 180° du Soleil) car elle y affaiblit la pesanteur.

On peut aussi dire que la force de marée n'agit pas sur les eaux placées à 90° du Soleil et que toute la force élève les eaux placées sous le Soleil et à l'opposé du Soleil. La force totale est alors la 12 000 000<sup>e</sup> partie de la pesanteur (1/12 868 240). Cette force perturbatrice fait perdre 7,77 mg à un corps de 100 kg :

$$100\ \text{kg} \times 1\ 000\ \text{g} \times 1\ 000\ \text{mg} / 12\ 868\ 240 = 7,77\ \text{mg}.$$

**Action de la Lune sur la mer.**

Dans l'ignorance de la masse lunaire, NEWTON pensait pouvoir trouver la valeur de la force de marée due à la Lune à

**Force perturbatrice du Soleil sur la Lune.**

Les valeurs moyennes des composantes de la force perturbatrice sont respectivement comme les distances *TP* et *ST*.

- Force moyenne *LM* / force moyenne *ST* = *TP*/*ST*. (relation n°1).

D'autre part, les forces d'attraction sont comme les distances *R* divisées par les carrés des temps périodiques *T*:

- Force proportionnel à *R* / *T*<sup>2</sup>.

On a donc, avec :

- *ST* = distance Terre-Soleil ; *TP* = distance Terre-Lune,
- *T<sub>Terre</sub>* = période de révolution de la Terre autour du Soleil,
- *T<sub>Lune</sub>* = période de révolution de la Lune autour de la Terre,
- Force moyenne *ST* = attraction du Soleil sur la Terre,
- *FC* = force centripète de la Lune ou attraction de la Terre sur la Lune
- Force moyenne *ST* / *F<sub>C</sub>* = *ST* / (*T<sub>Terre</sub>*) : *TP* / (*T<sub>Lune</sub>*) = Force moyenne *ST* / *F<sub>C</sub>* = *ST* / *TP* x (*T<sub>Lune</sub>*) / (*T<sub>Terre</sub>*) (relation n°2).

Des relations 1 et 2, on tire :

$$\begin{aligned} \text{Force moyenne } LM / F_C &= TP / ST \times ST / TP \times (T_{Lune}) / (T_{Terre}) \\ &= \times (T_{Lune})^2 / (T_{Terre})^2 \end{aligned}$$

En mettant les valeurs, en jours :

$$= 27,32^2 / 365,256^2 = 1/178,725.$$

La composante *LM* de la force perturbatrice du Soleil sur la Lune est

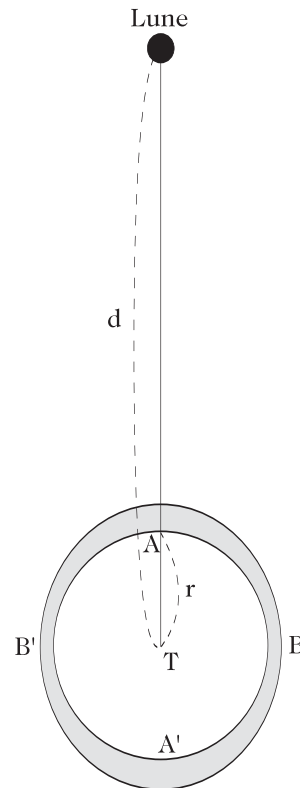


Figure 26

179 fois plus petite que l'attraction de la Terre sur la Lune. Si on veut comparer cette composante avec la pesanteur, il suffit de la

*CE*. Les espaces décrits, ou les déviations, sont proportionnels aux carrés des temps.

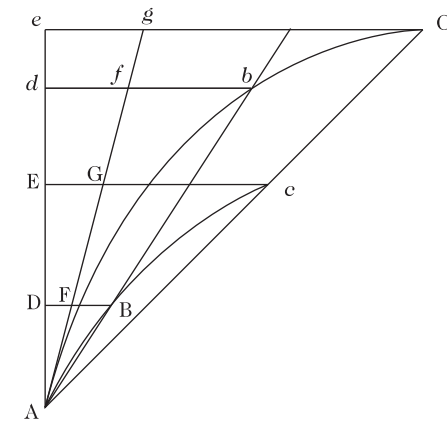


Figure 5

**Expression de la force centripète.**

Nous pouvons maintenant exprimer la force centripète en fonction de l'espace et du temps : c'est l'objet de la *Proposition 6 du Livre 1* dont nous donnons la traduction (fig. n°6).

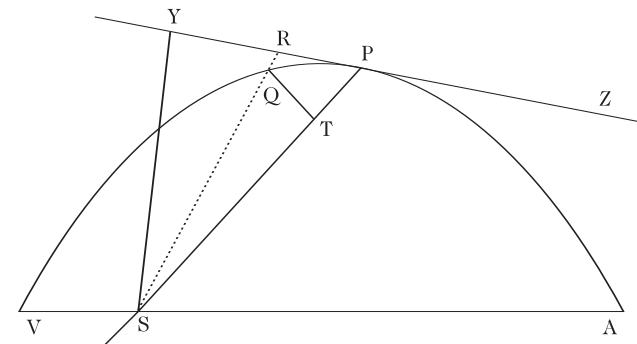


Figure 6

« Car dans la figure indéfiniment petite  $QRPT$ , la petite ligne naissante  $QR$  est, durant un temps donné, comme la force centripète (par la 2<sup>e</sup> Loi); et la force étant donnée, comme le carré du temps (par le lemme 10) ; et si rien n'est donné, conjointement comme la force centripète et le carré du temps. La force centripète est donc directement comme la petite ligne  $QR$  et inversement comme le carré du temps. Mais le temps est comme la surface  $SPQ$ , ou comme son double  $SP \times QT$ , c'est-à-dire conjointement comme  $SP$  et  $QT$ . La force centripète est donc directement comme  $QR$  et inversement comme  $SP^2$  multiplié par  $QT^2$ , c'est-à-dire inversement comme  $(SP \times QT) / QR$ . CQFD.

Corollaire. À partir de là, si une figure quelconque est donnée, et dans celle-ci un point vers lequel est dirigée la force centripète : on peut trouver la loi de la force centripète qui fait tourner le corps sur le périmètre de cette figure. Il faut assurément calculer le solide  $(SP \times QT) / QR$  qui est inversement proportionnel à cette force <sup>(15)</sup> ».

### L'ellipse.

La 1<sup>ère</sup> Loi de KEPLER indique que les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers. NEWTON cherche la valeur de la force centripète dans le cas d'une ellipse : la force y est exprimée en fonction du rayon vecteur et d'un ou plusieurs invariants de l'ellipse (livre 1, proposition 11).

Dans l'ellipse de centre  $C$  et de foyers  $S$  et  $H$ , on trace un diamètre  $GP$  (fig. n°7) : quand le corps va de  $P$  en  $Q$ , il subit la déviation  $QR$  du fait de la force centripète issue du foyer  $S$ . Traçons la parallèle  $Qv$  qui coupe le diamètre  $GP$  en  $v$ . Abaissons la perpendiculaire  $QT$  sur le rayon vecteur  $SP$ . En utilisant le paramètre que l'on désigne par la lettre  $L$ , on trouve l'expression :

$$(L \times QR) / QT^2 = 2PC / Gv.$$

Quand les points  $P$  et  $Q$  coïncident :

$$2 PC = Gv \text{ et } L \times QR = QT^2.$$

Multiplions les deux termes par  $SP^2 / QR$  et on obtient finalement :

### Les marées océaniques.

Les marées océaniques sont dues aux actions du Soleil et de la Lune sur la mer (livre 3, proposition 24). L'effet de marée exercée par la Lune (ou le Soleil) sur les eaux placées en  $A$  (c'est-à-dire sous la Lune ou le Soleil) et en  $A'$  (c'est-à-dire à l'opposé) est égal à la différence des attractions exercées par la Lune (ou par le Soleil) sur le centre  $T$  de la Terre et sur les eaux en  $A$  et en  $A'$  (fig. n°26).

L'eau placée en  $A$  est davantage attirée par la Lune (ou par le Soleil) que le centre  $T$  de la Terre ; et le centre  $T$  de la Terre est davantage attiré par la Lune (ou par le Soleil) que l'eau placée en  $A'$ . Autrement dit, la mer est moins attirée vers le centre de la Terre, et elle s'écarte du centre de la Terre en  $A$  et en  $A'$  en formant un ellipsoïde dont le grand axe est orienté vers la Lune (ou le Soleil ; cf livre 1, proposition 66, corollaire 19).

Aux endroits placés à 90° de la Lune (ou du Soleil), l'eau est pratiquement attirée vers la Lune (ou vers le Soleil) de la même façon que le centre de la Terre. Mais la composante parallèle à la ligne reliant une particule d'eau au centre de la Terre renforce l'attraction de la Terre, et l'eau se rapproche du centre de la Terre (cette composante est la même que la composante  $LM$  trouvée à propos de la force perturbatrice du corps  $S$ ).

Si on effectue le même calcul que tout à l'heure, on trouve que l'effet de marée varie comme le cube de la distance entre la Lune et le centre de la Terre (distance  $d$  sur la figure 26). Nous évaluons maintenant l'importance de l'effet de marée par rapport à la pesanteur.

La méthode de NEWTON consiste à calculer la force perturbatrice du Soleil sur la Lune puis d'en déduire la valeur à la surface de la mer (livre 3, proposition 25).

*P* et *T*. Posons le rapport suivant :

$$M / (a + r)^2 - M / a^2 \text{ ou } M / (a - r)^2 - M / a^2 \\ = M \times 2 ar + r^2 / (a + r)^2 \text{ ou } M \times 2 ar - r^2 / (a - r)^2.$$

On obtient finalement <sup>(40)</sup> :

- *force perturbatrice proportionnel à 2 M / a<sup>3</sup>.*

Aux quadratures, la distance *SP* est pratiquement égale à la distance *TP* et la force perturbatrice est comme *M / a<sup>3</sup>*.

La force perturbatrice est comme l'inverse du cube de la distance *a*, et cette force est deux fois plus importante aux syzygies qu'aux quadratures.

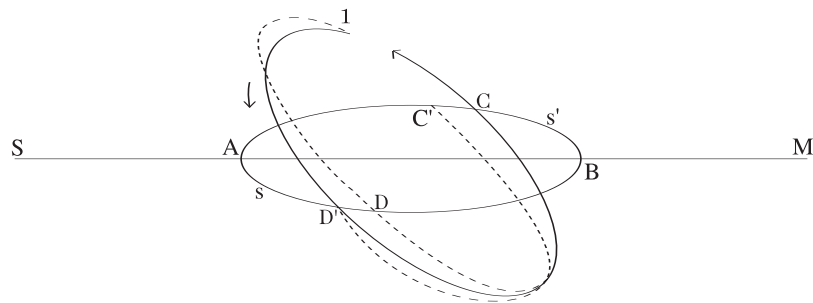


Figure 25

$$L \times SP^2 = (Sp^2 \times QT^2) / QR.$$

La seconde partie de l'égalité est l'inverse de la force centripète. Comme le paramètre est un invariant de l'ellipse, la force centripète est donc inversement comme *SP<sup>2</sup>* : elle décroît avec le carré de la distance au foyer de l'ellipse d'où provient la force centripète.

NEWTON généralise ce résultat aux autres coniques excentriques, la parabole et l'hyperbole, figures décrites par les comètes.

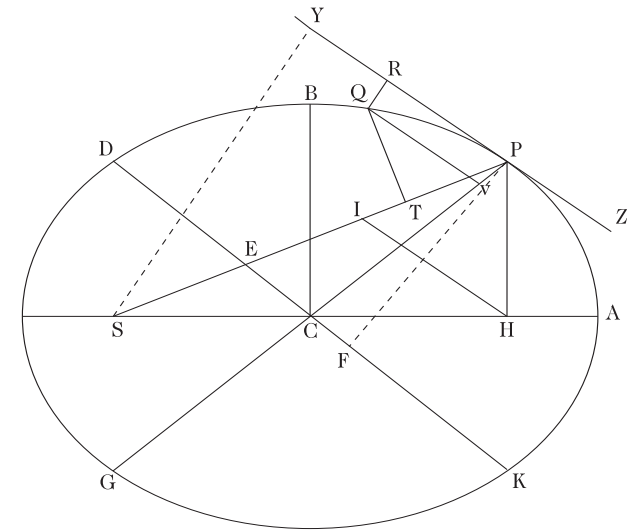


Figure 7

### La déviation de la Lune.

La mesure de la déviation de la Lune va permettre à Newton d'identifier la force centripète de la Lune à la Pesanteur (livre 3, proposition 4). En effet, la pesanteur est plus faible au sommet d'une haute montagne qu'au niveau de la mer et l'on peut supposer que son intensité décroît au delà <sup>(16)</sup>.

À cause de la force centripète issue de la Terre  $T$ , la Lune  $L$  est détournée de sa trajectoire inertielle  $LM$  et décrit l'arc de cercle  $LA$ , en ayant subi la déviation  $MA$  (fig. n°8). Nous supposons que l'orbite lunaire est circulaire.

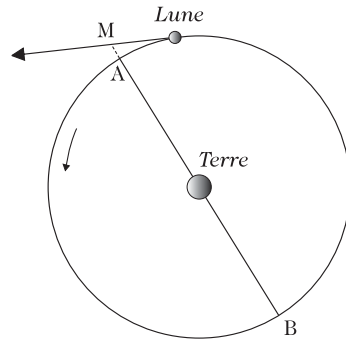


Figure 8

Nous disposons des éléments suivants (données modernes) :

- Diamètre  $AB$  de l'orbite lunaire = 768 000 km.
- Période sidérale de la Lune :  
 $27j\ 7h\ 43\ min\ 12s = 2\ 360\ 592\ s.$
- Trajet effectué par la Lune en 1 s :  
 $(768\ 000\ km \times \pi) / 2\ 360\ 592s = 1,023\ km.$

Étant donnée la grandeur de l'orbite lunaire, un arc de 1023 m est peu différent d'une droite de même longueur : donc, on peut prendre la droite  $LM$  à la place de l'arc  $LA$ .

Entre la sécante  $MB$  du cercle et la tangente  $LM$  au cercle, il existe la relation suivante :

$$ML^2 = MA \times MB.$$

Comme  $MA$  est petit devant le diamètre  $AB$ , on peut remplacer  $MB$  par  $AB$  et écrire:

$$ML^2 = MA \times AB.$$

La déviation  $MA$  est alors égale à :

$$MA = ML^2 / AB.$$

Avec les valeurs en mètres, la relation devient :

à la distance qui sépare le corps  $T$  du corps  $S$ . En effet, plus le corps  $S$  est proche du corps  $T$ , plus l'inclinaison de la ligne  $SP$  par rapport à la ligne  $ST$  est importante ; et plus les distances  $SP$  et  $ST$  sont inégales (fig. n°18).

- Force perturbatrice de  $S$  proportionnel à  $TP / ST$

En outre, l'attraction exercée par le corps  $S$  sur le corps  $T$  est comme l'inverse du carré de la distance  $ST$  :

- Force centripète de  $T$  vers  $S$  proportionnel à  $1 / ST^2$

Donc, la force perturbatrice exercée par le corps  $S$  sur le corps  $P$  varie comme le produit de ces deux rapports :

- Force perturbatrice de  $S$  proportionnel à  $TP / ST \times 1 / ST^2$
- Et, en prenant le rayon  $TP$  comme unité,
- Force perturbatrice de  $S$  proportionnel à  $1 / ST^3$ .

La force perturbatrice exercée par le corps  $S$  sur le corps  $P$  est inversement proportionnelle au cube de la distance du corps

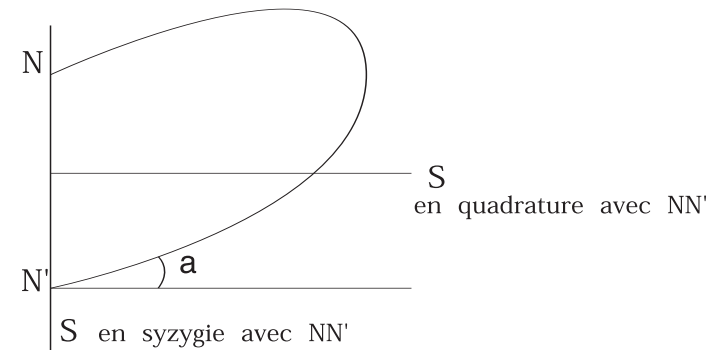


Figure 24

$S$  au corps  $T$ . Si la grandeur du corps  $S$  est comme sa force absolue, la force perturbatrice varie comme le cube du diamètre apparent du corps  $S$  vu depuis le corps  $T$ .

On peut trouver ce résultat par une autre méthode :

Posons :  $a = ST$  ;  $r = TP$  ;  $M =$  masse de  $S$ .

Aux syzygies, on a la distance  $(a + r)$  à l'opposition  $B$ , et la distance  $(a - r)$  à la conjonction  $A$ . La force perturbatrice est la différence des attractions exercées par le corps  $S$  sur les corps

conjonction ou l'opposition. L'inclinaison revient progressivement à sa première valeur quand le corps *P* va des syzygies aux quadratures, parce que la force du corps *S* diminue progressivement depuis la conjonction ou l'opposition jusqu'à la quadrature. Quand le corps *S* est dans une autre position par rapport à la ligne des nœuds, la perturbation en latitude est toujours inférieure (fig. n°24 - proposition 66, corollaire 10).

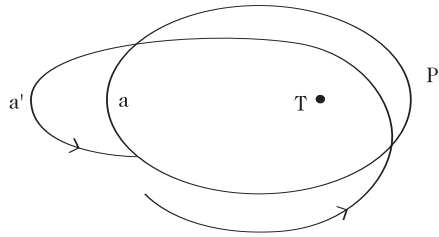


Figure 23

**Rétrogradation de la ligne des Nœuds.**

La force perturbatrice agit seulement quand les nœuds sont dans les syzygies. Le corps *P* part du point 1 (fig. n°25) : en se dirigeant vers la conjonction *A*, il est retiré du plan de son orbite et il est ramené vers le plan où se trouve le corps *S*. Au lieu de décrire l'orbite dont le point d'intersection avec le plan du corps *S* (c'est-à-dire le nœud) se trouve en *D*, il décrit l'orbite dont le point d'intersection est en *D'* : le nœud a rétrogradé de *D* en *D'*. À partir du nœud *D'*, le corps *P* devrait décrire l'orbite dont le nœud est *C'* : mais parce qu'il est ramené vers le plan du corps *S*, il décrit l'orbite dont le nœud est *C* (proposition 66, corollaire 11).

Telles sont (brièvement exposées) les principales perturbations du mouvement du corps *P* autour du corps *T* induites par la présence du corps *S*. Les mêmes phénomènes ont lieu quand le système des corps *P* et *T* est en révolution autour du corps *S* : dans ce cas, *P* est la Lune, *T* la Terre et *S* le Soleil.

**Variation de la force perturbatrice.**

La force perturbatrice varie comme la masse du corps *S*. Elle varie aussi avec le rapport des lignes *TP* et *ST*, c'est-à-dire dans la proportion du rayon *TP* de l'orbite du corps *P* par rapport

$$MA = (1023)^2 / 768\ 000\ 000 = 0,001\ 36\ m\ ou\ 1,36\ mm.$$

Nous pouvons conclure deux choses :

1 - Dans le mouvement circulaire, la déviation due à une force centripète est égale au carré de l'arc divisé par le diamètre de l'orbite.

2 - À la surface terrestre (c'est-à-dire à 1 rayon terrestre du centre de la Terre), un objet tombe de 4,90 mètres ou 4900 mm (résultat expérimental), sous l'action d'une force centripète que nous appelons *pesanteur*. Durant cette même seconde, la Lune tombe de 1,36 mm en étant placée à une distance de 60 rayons terrestres du centre de la Terre, sous l'action de l'action d'une force centripète que nous supposons être la pesanteur diminuée avec l'éloignement.

Le rapport des chutes donne la valeur dont décroît la pesanteur :  $4900 / 1,36 = 3600 = 60^2$ . La pesanteur décroît avec le carré de la distance au centre du mouvement circulaire, comme la force centripète décroît avec le carré de la distance au foyer dans le mouvement elliptique. Nous pouvons identifier la force centripète avec la pesanteur.

**La 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER.**

La 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER indique que les carrés des périodes de révolution des planètes autour du Soleil sont égaux aux cubes de leurs distances moyennes au Soleil. Autrement dit :

$$a^3 = T^2\ ou\ R^3 = T^2$$

si on remplace la distance moyenne ou le demi grand axe de l'ellipse par le rayon du cercle.

La déviation est égale au carré de l'arc décrit divisé par le diamètre:  $d = arc^2 / diamètre$ .

Grâce à GALILÉE, nous savons que l'espace décrit dans un mouvement accéléré est égal à la moitié de l'espace décrit dans un mouvement uniforme à la vitesse acquise par le corps en fin du mouvement accéléré. Traçons la parallélogramme *ABFG* égal au triangle *AEB* (fig. n°9). Leur hauteur commune *AB* représente le temps et les bases *FB* et *EB* représentent les vitesses. Quand

il se déplace à une vitesse constante représentée par le segment  $FB$ , le corps décrit l'espace représenté par le parallélogramme  $AGFB$ . Quand le corps est accéléré en ayant une vitesse nulle au départ, il décrit durant le même temps l'espace représenté par le triangle  $AEB$  et acquiert à la fin une vitesse  $FB$  égale au double de la vitesse  $EB$ .

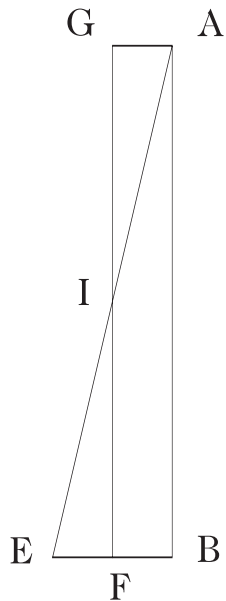


Figure 9

Si le corps se déplace uniformément à la vitesse  $EB$  (celle acquise à la fin du mouvement accéléré), il décrit un espace représenté par un parallélogramme de hauteur  $AB$  et de base  $EB$  égale ou double de la base  $FB$ , c'est-à-dire un espace égal au double du triangle  $AEB$  (l'espace décrit dans le mouvement accéléré) <sup>(17)</sup>.

L'accélération (ou la force qui la produit) est donc égale au double du mouvement qu'elle produit.

La déviation ( $arc^2 / diamètre$ ) est donc égale à la moitié de l'accélération due à la force centripète : l'accélération ou la force est donc égale à  $arc^2 / rayon$  ; ou :

$$Force = arc^2 / rayon \quad F = arc^2 / R$$

L'arc décrit dans l'unité de temps est comme la vitesse, donc :

$$F = v^2 / R$$

La vitesse sur le cercle est comme le rayon du cercle divisé par le temps mis à décrire ce cercle :  $v$  proportionnel à  $R/T$ .

$F$  proportionnel à  $(R^2 / T^2) / R$

ou à  $R^2 / (T^2 \times R)$  ou à  $R / T^2$ .

Dans la 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER :  $T^2$  proportionnel à  $R^3$ .

Dans l'expression  $F$  proportionnel à  $R / T^2$ , on remplace  $T^2$  par  $R^3$  et l'on obtient  $Force$  proportionnel à  $R / R^3$  ou à  $1 / R^2$ .

Dans le mouvement circulaire, une force centripète

**Variation de l'inclinaison de l'orbite.**

Jusqu'ici, nous avons considéré que les trois corps  $S$ ,  $T$  et  $P$  sont dans un même plan. Mais si le corps  $S$  se trouve dans un autre plan que celui de l'orbite de  $P$  autour de  $T$ , il en découle des perturbations en latitude.

La composante  $LM$  de la force perturbatrice agit toujours selon le rayon  $TP$  de l'orbite du corps  $P$  ; elle agit dans le plan de cette orbite et ne produit pas de perturbation en Latitude.

L'autre composante  $SM$  agit différemment.

Quand le corps  $S$  se trouve dans la ligne des nœuds <sup>(39)</sup> (« les nœuds sont dans les syzygies »), les corps  $S$  et  $P$  sont dans un même plan. Quand le corps  $P$  est

en quadrature avec le corps  $S$ , la force  $SM$  s'annule (comme nous l'avons vu plus haut) ; et quand le corps  $P$  est en syzygie avec le corps  $S$ , la force  $SM$  agit selon la ligne reliant les corps  $P$  et  $S$  qui sont dans le même plan: elle n'agit donc pas sur la latitude.

Maintenant, le corps  $S$  est à  $90^\circ$  de la ligne des nœuds (« les nœuds sont dans les quadratures ») : quand le corps  $P$  est en quadrature avec le corps  $S$ , la force  $SM$  s'annule mais quand le corps  $P$  est en Syzygie avec le corps  $S$ , la force  $SM$  agit sur l'inclinaison de l'orbite. Cette inclinaison diminue progressivement quand le corps  $P$  va des quadratures aux syzygies, parce la force du corps  $S$  augmente progressivement depuis la quadrature jusqu'à la

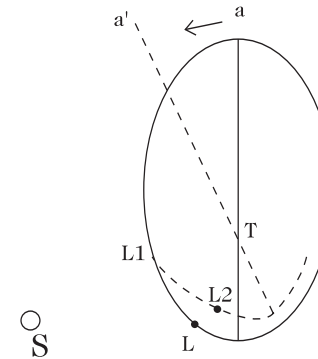


Figure 21

en quadrature avec le corps  $S$ , la force  $SM$  s'annule (comme nous l'avons vu plus haut) ; et quand le corps  $P$  est en syzygie avec le corps  $S$ , la force  $SM$  agit selon la ligne reliant les corps  $P$  et  $S$  qui sont dans le même plan: elle n'agit donc pas sur la latitude.

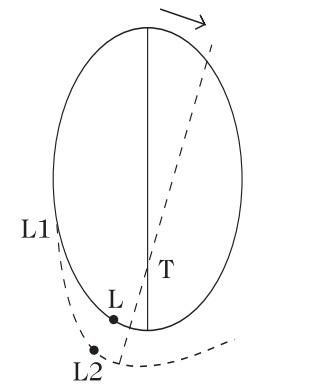


Figure 22



Mais aux quadratures, le corps  $P$  s'éloigne du corps  $T$ . Parti de  $L_1$ , le corps  $P$  n'ira pas au point  $L$  mais au point  $L_2$ , plus éloigné du corps  $T$ . Tout se passe comme si le grand axe de l'ellipse avait tourné autour du foyer  $T$ , mais dans le sens contraire au déplacement du corps  $P$  sur son orbite (fig. n°22): l'axe a reculé.

Comme la valeur de la force perturbatrice est plus importante aux syzygies qu'aux quadratures, le grand axe avance plus qu'il ne recule : le bilan sera une avance du grand axe de l'ellipse décrite par le corps  $P$  (proposition 66, corollaire 7).

Par exemple, le grand axe de l'ellipse de la Lune fait un tour en 8 années et 310 jours, ce qui équivaut à une avance d'environ  $3^\circ$  à chaque lunaison.

**Variation de l'excentricité.**

Si l'orbite du corps  $P$  est une ellipse, son excentricité varie au cours de la révolution du corps  $P$  autour du corps  $T$ . L'orbite est plus courbe aux quadratures : l'orbite se rapproche davantage d'un cercle, l'excentricité diminue et le périastre du corps  $P$  n'est plus en  $P$  mais en un point  $P'$  plus proche du corps  $T$  (fig. n°23). L'orbite est moins courbe aux syzygies : elle s'écarte davantage du cercle, l'excentricité augmente et l'apoastre n'est plus en  $a$ , mais en un point  $a'$  plus éloigné du corps  $T$  (proposition 66, corollaire 9).

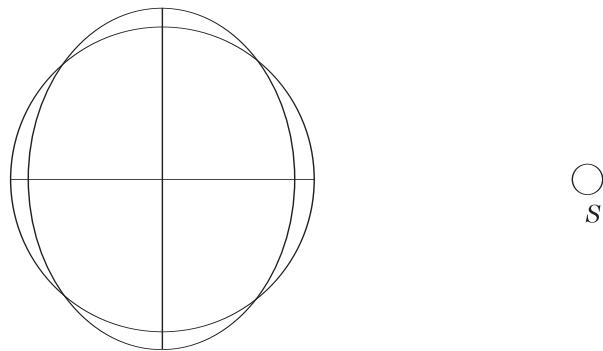


Figure 20

décroissant avec le carré de la distance fait décrire aux planètes des orbites dont les cubes des distances sont égaux aux carrés des périodes de révolution <sup>(18)</sup>.

**Validité de la 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER**

KEPLER a formulé cette 3<sup>e</sup> Loi pour les planètes. Mais cette loi est aussi valable pour les satellites de planètes. NEWTON le montre pour ceux de Jupiter et de Saturne. Retenons l'exemple des satellites de Jupiter, dits « galiléens » parce que découverts par GALILÉE en 1610. Nous reproduisons le tableau donné par NEWTON en 1687 <sup>(19)</sup>. Connaissant la période de révolution  $T$ , la distance moyenne  $a$  se trouve par la relation :  $T = a^{3/2}$ .

Le tableau montre que le rapport  $a^3/T^2$  est constant. NEWTON en déduit que les révolutions des satellites autour de Jupiter et de Saturne et celles des planètes autour du Soleil sont des phénomènes du même genre : elles obéissent à la 3<sup>e</sup> Loi de Kepler, qui trouve sa justification dans le cas d'une force centrale décroissant avec le carré de la distance.

De plus, la force centripète de la Lune décroît de la même façon, et cette force n'est autre que la pesanteur terrestre diminuée avec l'éloignement. Les causes des effets naturels du même genre sont les mêmes <sup>(20)</sup>.

Newton en conclut que tous les corps célestes sont le siège de forces centripètes qui décroissent avec les carrés des distances à leurs centres.

**La gravité d'un corps augmente avec sa masse.**

Chaque particule de matière est dotée d'une force d'attraction. Toutes les particules de matière s'attirent mutuellement (par la 3<sup>e</sup> loi du mouvement) avec une force qui décroît avec le carré de leurs distances. Comme on suppose que ces particules sont toutes identiques, en se regroupant, elles constituent des corps d'autant plus massifs qu'ils contiennent plus de particules : l'attraction exercée par un corps est donc

proportionnel à sa masse ou quantité de matière.

On peut illustrer cela en supposant que plusieurs petites planètes se regroupent pour former une grosse planète : l'attraction de cette grosse planète est composée des attractions des petites planètes qui la constituent <sup>(21)</sup>.

Pourquoi deux pierres posées sur le sol ne se réunissent-elles pas à cause de leur attraction mutuelle ? La réponse est simple : la masse de la Terre est de très loin supérieure à celle de n'importe quel objet placé <sup>(22)</sup>. Les deux pierres sont davantage attirées vers le bas par la Terre que l'une vers l'autre, et ce à proportion des masses.

Ainsi, la Terre dont le rayon est de 19 615 800 pieds ou 20 000 000 pieds en valeur arrondie, attirera 20 000 000 fois plus une pierre dont le rayon est de 1 pied, c'est-à-dire 20 000 000 fois plus petite, et ce, à densité égale <sup>(23)</sup>. Cette évaluation de NEWTON est bien inférieure à la vérité : la masse de la Terre est en effet de  $6 \times 10^{24}$  kg. La première évaluation en a été faite par CAVENDISH (1731-1810).

La formule de l'attraction universelle est donc la suivante :

$$F = k \times (M \times m) / D^2$$

où  $F$  est la force d'attraction que les deux masses  $M$  et  $m$  exercent l'une sur l'autre en étant séparées par la distance  $D$  ;  $k$  est une constante (l'attraction unitaire entre deux masses unitaires placées à la distance unitaire l'une de l'autre).

quadrature  $D$ , il est ralenti en direction du corps  $S$  (en *conséquence*, en arrière).

Quand le corps  $P$  se dirige de la quadrature  $D$  à l'opposition, il est accéléré en direction du corps  $S$ , mais il est freiné dans la même direction quand il va de cette opposition  $B$  à la quadrature  $C$ . La vitesse du corps  $P$  est donc maximale aux syzygies (conjonction et opposition) et minimale aux quadratures (proposition 66, corollaires 2 et 3).

#### *Variation de la distance de P au corps T.*

L'orbite du corps  $P$  est plus courbe dans les quadratures qu'aux syzygies, pour deux raisons :

- comme sa vitesse est plus grande aux syzygies, la trajectoire du corps  $P$  se rapproche davantage d'une ligne droite ;
- l'attraction exercée par le corps  $T$  est plus faible aux syzygies et le corps  $P$  est donc moins détournée de sa trajectoire rectiligne.

Aux syzygies, le corps  $P$  se rapproche du corps  $T$ .

Mais aux quadratures, l'attraction du corps  $T$  est renforcée, le corps  $P$  est davantage détourné de sa trajectoire rectiligne, son orbite est plus courbe et il s'éloigne donc du corps  $T$  (proposition 66, corollaires 4 et 5).

L'orbite du corps  $P$ , supposée circulaire, devient une ellipse dont le petit axe est orienté vers le corps  $S$  (fig. n°20).

#### *Rotation de la ligne des apsides.*

Si l'orbite du corps  $P$  est une ellipse képlérienne, alors le grand axe de cette ellipse (ou la ligne des apsides) ne reste pas fixe par rapport aux étoiles, mais il est animé d'un mouvement de rotation autour du foyer dans lequel se trouve le corps  $T$ . En effet, aux syzygies, le corps  $P$  se rapproche du corps  $T$ . Parti de la position  $L_1$ , il n'ira pas au point  $L$  mais au point  $L_2$ , plus proche de  $T$ . Tout se passe comme si le grand axe de l'ellipse avait tourné autour du foyer  $T$  dans le même sens que le déplacement du corps  $P$  (fig. n°21) : l'axe a avancé.

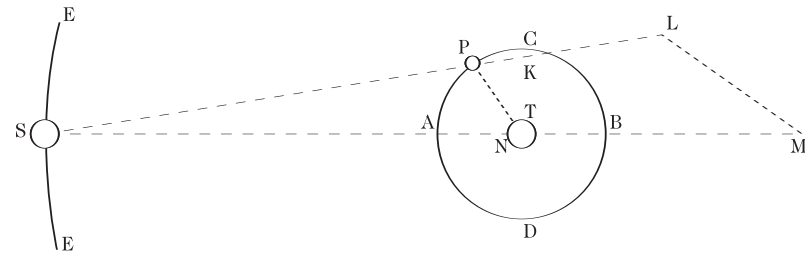


Figure 18

massif ou plus proche (ou les deux à la fois).

### Conséquences de la force perturbatrice.

Voyons comment est perturbée l'orbite du corps  $P$ .

Quand le corps  $P$  est à la conjonction  $A$ , il est davantage attiré par le corps  $S$  que le corps  $T$ . Autrement dit, l'attraction de  $P$  vers  $T$  (ou la force centripète de  $P$  issue de  $T$ ) est diminuée par l'action de la composante  $SM$  de la force du corps  $S$ .

Quand le corps  $P$  est à l'Opposition, il est moins attiré vers le corps  $S$  que le corps  $T$ . L'attraction du corps  $P$  vers le corps  $T$  est diminuée par la composante  $SM$  de la force du corps  $S$ .

Dans ces deux cas, le rayon  $TP$  de l'orbite du corps  $P$  s'aligne avec le rayon  $ST$  de l'orbite du corps  $S$  : la composante  $LM$  n'agit pas.

Quand le corps  $P$  est aux quadratures  $C$  et  $D$ , la force centripète issue du corps  $T$  est renforcée par la composante  $LM$ . La composante  $SM$  n'agit pas, puisque la distance du corps  $P$  au corps  $S$  est pratiquement égale à celle du corps  $T$  au corps  $S$ .

### Variation de la vitesse du corps $P$ :

Quand le corps  $P$  va de la quadrature  $C$  à la conjonction  $A$ , il est accéléré en direction du corps  $S$ , et ce dans le sens de son déplacement<sup>(38)</sup> (en *antécédence*, dit NEWTON, c'est-à-dire en avant). Au contraire, quand le corps va de la conjonction  $A$  à la

## Masses et densités du Soleil et des planètes. Pesanteurs sur leurs surfaces.

On veut comparer les forces exercées par des corps attractifs (Soleil, planètes) sur d'autres corps (planètes, satellites) placées à des distances différentes : comme les forces sont proportionnelles aux masses, la comparaison des forces permet la comparaison des masses. L'exemple suivant permettra au lecteur de comprendre la démarche newtonienne (nous suivons l'exposé de la proposition 8 du Livre 3).

On a les relations suivantes :

- les forces centripètes exercées sur des corps égaux placés à des distances  $R$  et en révolution durant des périodes  $T$  autour de corps centraux, sont proportionnelles à  $R/T^2$ .
- la force centripète émanant d'un corps décroît avec le carré de la distance au centre :  
*force proportionnel à  $1/R^2$ .*

On dispose des données suivantes :

À l'époque, les distances absolues étaient incertaines : il valait mieux se servir des rayons apparents. Le rayon apparent du Soleil est de  $16'1$  et sa distance est de  $1UA$ . On en déduit que les distances de Callisto (par rapport à Jupiter) et de Titan (par rapport à Saturne) en rayons solaires  $Rs$  :

- distance Callisto =  $42'98/16'1 = 2,666 Rs$
- distance Titan =  $29'132/16'1 = 1,809 Rs$ .

Il faut aussi calculer la distance de Vénus au Soleil en rayons solaires :

$$1UA = 106 \text{ diamètres solaires}^{(25)} = 212 Rs.$$

$$0,72UA = 152,64 Rs.$$

$$\text{distance de Vénus au Soleil} = 152,64 Rs.$$

Maintenant, calculons les forces au moyen de la formule

$$F=R / T^2 :$$

- Force du Soleil sur Vénus =  $152,64 / 224,698^2 = 0,003023$ .
- Force de Jupiter sur Callisto =  $2,666 / 16,688^2 = 0,009575$ .

Ce sont les forces exercées par le Soleil et par Jupiter à des

distances inégales. Pour connaître leurs forces absolues, celles exercées aux mêmes distances, il faut ramener Callisto à la distance de Vénus au Soleil (152,64 *Rs*), c'est-à-dire placer Callisto à une distance 57 fois plus grande, et calculer la force de Jupiter à cette nouvelle distance.

- Distance Vénus / distance Callisto (en *Rs*) :  
 $152,64 / 2,666 = 57,25$ .

La force de Jupiter décroît avec le carré de la distance (*F proportionnel à 1 / R<sup>2</sup>*) :

- Force absolue de Jupiter :  
 $0,009\ 572 / 57,25^2 = 0,000\ 002\ 92$

On calcule le rapport des forces absolues du Soleil et de Jupiter, et ce rapport est aussi celui de leurs masses :

- force absolue du Soleil / force absolue de Jupiter :  
 $0,003\ 0232 / 0,000\ 002\ 92 = 1 / 1042$ .

D'après ce calcul, la masse du Soleil est mille fois plus importante que celle de Jupiter.

Faisons le même calcul pour Titan :

- force de Saturne sur Titan :  
 $R/T^2 = 1,809 / 15,9442 = 0,007\ 116$ .

Ramenons Titan à la même distance que Vénus :  
 $152,64 / 1,809 = 84,378$

- Force absolue =  $0,007\ 116 / 84,378^2 = 0,000\ 000\ 999$
- Force absolue du Soleil / force absolue de Saturne :  
 $0,003\ 023 / 0,000\ 000\ 999 = 1 / 3024$ .

D'après ce calcul, le Soleil est trois mille fois plus massif que Saturne.

### **Poids des corps sur les surfaces du Soleil, de Jupiter et de Saturne.**

Un corps à la surface du Soleil est 152,64 fois plus proche du Soleil que Vénus : la force du Soleil augmente avec le carré de la distance ; donc :

- Poids <sup>(26)</sup> d'un corps sur le Soleil :  
 $0,003\ 023 / 152,64^2 = 70,43$ .

### **Composantes de la force perturbatrice.**

NEWTON étudie ce problème des 3 corps dans la proposition 66 du livre 1. Le corps *P* tourne autour du corps *T* sur l'orbite *APC* (fig. n°18). Le corps *S* tourne autour du corps *S* sur l'orbite *ESP*. La ligne *SK* représente l'attraction du corps *P* vers le corps *S*, quand sa distance au corps *S* est à peu près la même que la distance du corps *S* au corps *T* (*SK = ST*). La ligne *SL* représente l'attraction du corps *P* vers le corps *S* quand celui-ci est plus éloigné ou plus proche du corps *S*. Quand la distance *SP* est plus petite que la distance *ST* ou *SK*, la force du corps *S* sur le corps *P* est plus importante que sa force sur le corps *T* : dans la figure de NEWTON, la ligne *SL* est donc plus grande que la ligne *SK* ou *ST*.

NEWTON décompose cette force perturbatrice *SL* en deux forces, la force *LM* et la force *SM*. Le corps *P* est alors soumis à trois forces.

- 1<sup>ère</sup> force.

C'est l'attraction exercée par le corps *T* sur le corps *P*, ou la force centripète de *P* issue du corps *T*. Quand cette force agit seule (c'est-à-dire, s'il n'y avait pas le corps *S*), le corps *P* décrit autour du corps *T* un cercle ou une ellipse.

- 2<sup>e</sup> force.

C'est la composante *LM* de la force perturbatrice induite par la présence du corps *S*. Cette composante est parallèle au rayon *TP* de l'orbite du corps *P*. Elle s'ajoute à la force centripète du corps *P*, et compose avec elle une force qui ne décroît plus avec le carré de la distance *TP*. Or, l'orbite parfaitement circulaire ou elliptique n'est possible que si la force décroît avec le carré de la distance.

- 3<sup>e</sup> force.

C'est la composante *SM* de la force perturbatrice induite par le corps *S*. Cette composante est parallèle au rayon *ST* de l'orbite du corps *S* autour du corps *T*. Cette force compose avec les deux premières une force qui n'est plus dirigée selon le rayon *TP*, mais qui s'en écarte d'autant plus que le corps *S* est plus

à distance), alors tous les corps pourraient décrire des ellipses rigoureuses autour de leur centre commun de gravité : les corps *A* et *B* autour de leur centre de gravité *C*, le centre *C* et un corps *D* autour de leur centre commun *E*, le centre *E* et un corps *F* autour de leur centre commun *G*, et ainsi de suite, indéfiniment (livre 1, proposition 64).

Mais quand la force décroît avec le carré de la distance (*force proportionnel à 1 / distance<sup>2</sup>*), les corps en révolution décrivent des ellipses assez rigoureuses :

- quand les corps sont en révolution autour d'un corps suffisamment massif pour que le centre commun de gravité tombe à la surface ou à l'intérieur de celui-ci ;
- quand des corps tournent autour d'un corps suffisamment lointain pour que les lignes reliant ces corps à celui-ci puissent être considérées comme parallèles et de mêmes longueurs ;
- ou quand deux corps en révolution l'un autour de l'autre sont attirés par un 3<sup>e</sup> corps suffisamment lointain pour que les lignes les reliant à celui-ci puissent être considérés comme parallèles et égales (proposition 65).

Autrement dit, quand ce corps lointain se rapproche des autres, les lignes qui relient ce corps aux autres s'inclinent davantage et leurs inégalités augmentent : les ellipses se déforment davantage. On dit que les mouvements sont davantage perturbés.

Examinons le problème des 3 corps (fig. n°18) : le corps *S* décrit une orbite circulaire autour du corps *T* : la distance *ST* est donc invariable. Mais du fait de la révolution du corps *P* autour du corps *T*, la distance *SP* varie sans cesse et le corps *P* ne peut pas décrire un cercle autour du corps *T*. Dans la conjonction, le corps *P* se trouve entre *S* et *T* et est donc plus proche du corps *S* : il est alors davantage attiré par ce corps *S*. À l'opposition, le corps *P* se trouve au-delà du corps *T*, et est donc plus éloigné du corps *S* : il est alors moins attiré vers ce corps *S*.

On fait le même genre de calcul pour trouver les poids sur les surfaces de Jupiter et de Saturne :

- Rayon de Jupiter à 5,2 UA = 19''75 ;
- Rayon de Jupiter à 1 UA = 19''75, 5,2 = 102''7.

Exprimé en rayons solaires, ce rayon devient  $102''7 / (16'1x60'') = 0,1063 \text{ Rs}$ .

La surface de Jupiter est 25 fois plus proche du centre de Jupiter que Callisto. En effet, exprimées en rayons solaires, ces distances sont dans le rapport suivant :  $2,66 / 0,1063 = 25,023$ .

Le poids d'un corps sur Jupiter est égal à la force de Jupiter sur Callisto multipliée par le carré de 25, c'est-à-dire :

$$0,009\ 572 \times 25,023^2 = 5,9953.$$

Comparons les poids sur le Soleil et sur Jupiter :

$$70,43 / 5,995 = 11,74 / 1.$$

Le poids d'un corps est onze fois plus grand sur le Soleil que sur Jupiter.

On calcule le poids d'un corps sur Saturne en employant la même méthode :

- Rayon de Saturne à 9,5 UA = 9''.
- Rayon de Saturne à 1 UA = 9'' x 9,5 = 85''.
- Rayon de Saturne en rayons solaires =  $85'' / (16'1 \times 60'') = 0,0885 \text{ Rs}$ .
- distance de Titan divisée par le rayon saturnien, en *Rs* =  $1,809 / 0,0885 = 20,43$ .
- Poids d'un corps sur Saturne :  $0,007\ 116 \times 20,43^2 = 2,97$ .
- Poids le Soleil / poids sur Saturne =  $70,43 / 2,97 = 23,71$ .

Un corps pèse presque 24 fois plus sur le Soleil que sur Saturne.

On a effectué tous ces calculs dans l'ignorance des distances absolues. Les distances relatives étaient assez bien connues à l'époque (3<sup>e</sup> Loi de KEPLER). Mais quelle était la valeur de la distance Terre-Soleil ? Dans ses calculs, NEWTON retient les valeurs suivantes pour cette distance, en rayons terrestres et en millions de km <sup>(27)</sup>.

La dernière ligne du tableau est le résultat (arrondi) de

l'expédition française de 1672 : Jean RICHER se rendit à Cayenne tandis que CASSINI, PICARD et ROËMER faisaient leurs observations à Paris pour déterminer la distance de la Terre au Soleil.

De plus, d'autres incertitudes provenaient des petites erreurs faites dans les mesures angulaires des diamètres apparents des corps célestes.

**Densités des planètes.**

Les poids sur des sphères homogènes augmentent avec les rayons de ces sphères (livre 1, proposition 72). En effet, le volume d'une sphère est proportionnel au cube du rayon, et la gravité décroît avec le carré de ce même rayon : donc,

- poids proportionnel à  $R^3 / R^2$  ou à  $R$ .

Dans des sphères hétérogènes, les poids augmentent avec le rayon et avec la densité : poids proportionnel à rayon x densité. Les densités sont donc comme les poids divisés par les rayons :

- densité proportionnel à poids/rayon.

Les densités du Soleil, de Jupiter et de Saturne se calculent alors très facilement :

La densité se calcule aussi en divisant la masse par le volume, ou par le cube du rayon. Les valeurs modernes diffèrent de celles trouvées par Newton.

11,862 années. En appliquant la règle  $a = T^{2/3}$ , on trouve le demi grand axe égal à 5,20122. C'est le demi grand axe rapporté au Soleil ; immobile. Augmentons le demi grand axe en utilisant la formule, c'est-à-dire multiplions la masse du Soleil  $S$  par le carré de la somme des masses du Soleil et de Jupiter, divisons ensuite le résultat par la somme des masses du Soleil et de Jupiter et enfin prenons la racine carré du résultat. On trouve le demi grand axe  $a = 5,2037$ , rapporté au Soleil mobile autour du centre de gravité.

Maintenant, faisons le rapport suivant :  $5,2037^3 / 11,862^2$  ; on trouve  $1 + 1/1000$ , c'est-à-dire la somme des masses du Soleil et de Jupiter.

**Le système de plusieurs corps.**

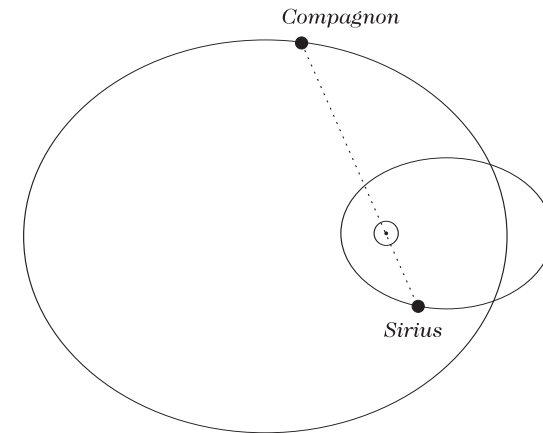


Figure 17

Nous avons considéré deux corps en interaction. Mais les choses se compliquent quand il y a trois ou plusieurs corps en interaction. NEWTON étudie la question dans les propositions 65 et 66 du livre 1.

Si la force augmentait avec la distance (*force proportionnel*

## Les perturbations.

L'attraction entre les corps est mutuelle (par la 3<sup>e</sup> Loi du Mouvement). NEWTON en examine quelques conséquences dans la section 11 du livre I des *Principia*.

### Le centre de gravité.

La Première Loi de KEPLER indique qu'une planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. Si on tient compte du fait que le Soleil et la planète s'attirent mutuellement, alors le Soleil et la planète tournent autour de leur centre commun de gravité en décrivant des ellipses semblables mais de tailles différentes. Il en est de même pour les systèmes d'étoiles doubles (fig. n°17), inconnus à l'époque de NEWTON.

Cependant, la masse du Soleil est environ 1000 fois plus grande que celle de Jupiter, la plus grosse des planètes. Le centre commun de gravité du système formé par le Soleil et Jupiter est 1000 fois plus proche du Soleil et l'ellipse décrite par le Soleil est aussi 1000 plus petite. Ce centre commun tombe à peu près à la surface du Soleil (livre 3, proposition 12).

La 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER dit que :  $a^3 = T^2$  ou  $a^3 / T^2 = 1$ .

En fait, le résultat est supérieur à 1, mais comme le Soleil est beaucoup plus massif que n'importe quelle planète, le rapport est toujours pratiquement égal à 1. Par exemple, dans le cas de Jupiter, le rapport donne 1,001 ou  $1 + 1/1000$ .

Le demi grand axe  $a$  d'une planète se trouve en faisant  $T^{2/3}$ . Mais ce faisant, on trouve le grand axe par rapport au Soleil supposé immobile (comme le croyait KEPLER).

En tenant compte de son proportionnel mouvement autour de centre commun de gravité, le demi grand axe doit être agrandi dans la proportion suivante, où  $S$  et  $P$  sont les masses du Soleil et d'une planète (livre 1, proposition 60 et livre 3, proposition 15) :

$$V(S + P^2 \times S) : S + P$$

Par exemple, la période de révolution de Jupiter est de

## Un corps sphérique attire comme si toute sa masse était concentrée en son centre.

Nous avons raisonné jusqu'ici en admettant que le Soleil, les planètes et la Terre attirent comme si elles étaient ponctuelles, et en calculant les distances de centre à centre. On peut l'admettre facilement, étant donné la petitesse des corps célestes par rapport aux distances qui les séparent. Mais il n'est pas évident qu'il en soit ainsi près des surfaces ou sur les surfaces. Newton démontre la validité de ce raisonnement dans la Section 12 du Livre des *Principia*.

### Cas d'une sphère creuse.

Considérons une sphère creuse éloignée de tout corps important et ne tournant pas sur elle-même. L'attraction de chaque partie de cette sphère augmente avec sa masse et diminue avec le carré de la distance.

Considérons cette sphère creuse (fig. n°10). À partir d'un point  $P$  placé à l'intérieur, traçons deux droites formant entre elles un angle très petit : ces droites délimitent deux arcs inégaux  $HI$  et  $KL$  à partir desquels on délimite deux surfaces sphériques. Les masses de ces parties sphériques sont comme leurs surfaces (puisque leurs épaisseurs sont les mêmes).

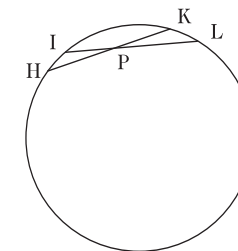


Figure 10

Si le point  $P$  se confond avec le centre de la sphère, les arcs seront égaux, les surfaces qu'on peut tracer sur ces arcs sont égales et leurs distances au centre sont égales : leurs attractions sur le corps  $P$  sont égales et s'annulent car elles sont dirigées en sens contraires.

Si le point  $P$  n'est pas au centre de la sphère, les longueurs des arcs augmentent avec les distances au point  $P$ . Les surfaces qu'on peut tracer sur ces arcs au moyen des lignes passant par le point  $P$  sont comme les carrés des distances au point  $P$ . Par conséquent, ces surfaces et leurs attractions augmentent avec les carrés de leurs distances au point  $P$ , mais leurs attractions diminuent avec le carré de la distance au point  $P$  <sup>(28)</sup>.

Les attractions de ces deux surfaces sur le point  $P$  s'annulent et le point  $P$  est donc en équilibre à l'intérieur de la sphère (livre 1, proposition 70).

**La même sphère creuse attire un corps situé à l'extérieur.**

Chaque partie de la surface sphérique attire un corps  $P$  placé à l'extérieur avec une force qui décroît avec le carré de la distance. NEWTON délimite des surfaces sphériques tracées par les rotations des points  $I$  et  $L$  autour de l'axe  $PS$  prolongé (fig. n°11).

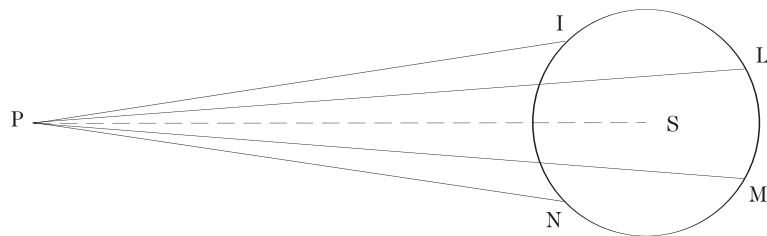


Figure 11

L'attraction du point  $I$  sur le corps  $P$  se fait selon la ligne  $IP$  et est proportionnelle au carré de cette même ligne  $IP$ . NEWTON décompose ensuite cette attraction et considère sa composante selon la ligne  $PS$  et il trouve que cette composante décroît aussi

- Vitesse angulaire du Soleil dans la Vierge / vitesse angulaire du Soleil dans les Poissons = 3/2.

La vitesse angulaire moyenne du Soleil, son pas quotidien, est de 59'8". d'où :

$$M + X / M - X = 3/2 \text{ d'où } X = M/S = 59'8''/5 = 11'$$

$$M + X = 59'8'' + 11' = 70'8'' \text{ ou } 70' \text{ en nombre rond}$$

$$M - X = 59'8'' - 11' = 48'8'' \text{ ou } 48' \text{ en nombre rond}$$

On n'observe pas une telle variation du pas quotidien du Soleil. Dans la Vierge, la Terre est proche de son périhélie : elle va plus vite, et le pas quotidien du Soleil, vu de la Terre, est de 60' ou 1°. Dans les Poissons, la Terre est proche de son aphélie et elle va plus lentement : le pas quotidien du Soleil est alors de 58'. La conclusion s'impose : L'hypothèse des tourbillons est en totale contradiction avec les phénomènes astronomiques et contribue moins à expliquer les mouvements célestes qu'à les perturber.



lesquelles une planète se déplace plus vite au périhélie et plus lentement à l'aphélie (livre 2, proposition 53, Scholie).

**Exemple de la Terre.**

NEWTON chiffre ce résultat. Il prend le cas de l'orbite terrestre, placée entre les orbites de Vénus et de Mars. L'aphélie de Mars est placé à 1,65 UA du Soleil, dans le signe de la Vierge (à 156°). Le périhélie de Mars est à 1,37 UA et se situe dans le Signe des Poissons (à 336°). L'orbite de Vénus est supposée circulaire, avec un rayon de 0,723 UA (son excentricité est de 0,007, donc très faible).

Au début de la Vierge, l'espace compris entre les orbites de Mars et de Vénus est plus large que l'espace compris entre ces orbites, au début des Poissons, dans la proportion de 3 à 2 :

- Espace plus large dans la Vierge = 1,65-0,72 = 0,93 UA.
- Espace plus étroit dans les Poissons = 1,37 - 0,72 = 0,65 UA.
- Rapport des espaces = 0,93/0,65 = 1,5 = 3/2.

Dans l'hypothèse des tourbillons, la vitesse des parties du tourbillon est plus rapide dans les Poissons, car l'espace y est plus étroit, et plus lente dans la Vierge, car l'espace y est plus large ; et ce dans la même proportion de 3 à 2. La Terre, emportée par ce tourbillon, doit donc suivre la même loi.

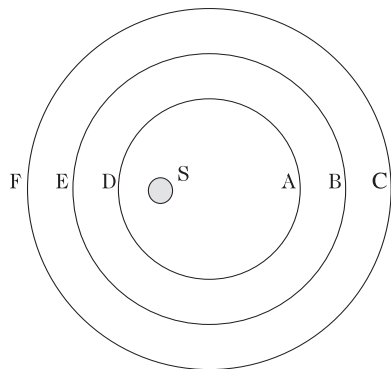


Figure 16

est dans les Poissons, le Soleil, vu de la Terre, est à l'opposé, c'est-à-dire dans la Vierge. Le pas quotidien du Soleil doit donc être plus rapide dans la Vierge que dans les Poissons. Donc :

avec le carré de cette ligne *PS*. Il fait de même pour l'attraction du point *L* (livre 1, proposition 71). Il en est de même pour les composantes selon la ligne *PS* de toutes les attractions des surfaces sphériques tracées par les rotations des points *L, M, N*, etc., autour de l'axe *PS*.

On peut aussi calculer les attractions de chaque point *I, L, M, N*, etc., en les supposant inversement proportionnelles aux carrés des distances *IP, LP, MP, NP* : la somme de ces attractions sur le point *P* est égale à l'attraction de ce point *P* vers le centre de la sphère, selon la ligne *PS*, et est donc inversement proportionnelle au carré de cette ligne *PS*, à condition d'attribuer au centre *S* de la sphère une masse égale à la somme des masses des points *I, L, M, N*.

Une sphère attire comme si sa masse était concentrée en son centre.

**Attraction d'une sphère pleine et homogène sur un corps placé à l'extérieur.**

Le corps *P* est placé à l'extérieur d'une sphère pleine et homogène (la densité étant la même partout). NEWTON décompose la sphère en une infinité de couches sphériques concentriques : chaque couche est une surface sphérique qui attire le corps *P* avec une force décroissant avec le carré de la distance à son centre. La somme de toutes les attractions de ces couches constitue l'attraction d'une sphère pleine et homogène (livre 1, proposition 74).

**Deux sphères pleines et homogènes s'attirent.**

Les sphères *AB* et *AG* sont séparées par la distance *SP*, mesurée du centre *S* au centre *P* (fig. n°12). La sphère *AB* attire l'autre sphère *GH* comme si toute sa masse était concentrée en son centre *S*. De même, la sphère *GH* attire l'autre sphère *AB* comme si toute sa masse était concentrée en son centre *P*. Les deux sphères *AB* et *GH* peuvent donc être réduites à deux

corpuscules *S* et *P* de mêmes masses qu'elles (livre 1, propositions 75 et 76).

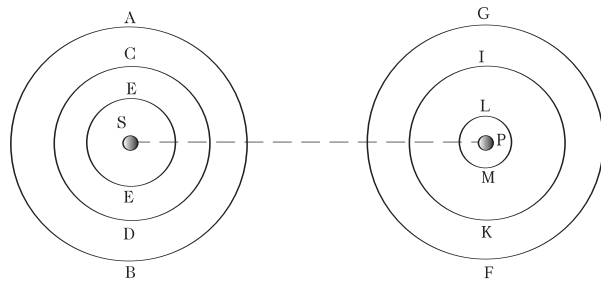


Figure 12

Ces deux sphères pleines sont homogènes. Mais ce résultat s'applique aussi si les deux sphères sont hétérogènes, pourvu que les deux sphères suivent la même loi d'hétérogénéité : par exemple, si la densité diminue pareillement dans les deux sphères, depuis le centre vers la surface.

**Le corps *P* est à l'intérieur d'une sphère pleine et homogène.**

À l'intérieur d'une sphère *ABCD*, on trace la surface sphérique *PEQF* de rayon *PS* (fig. n°13).

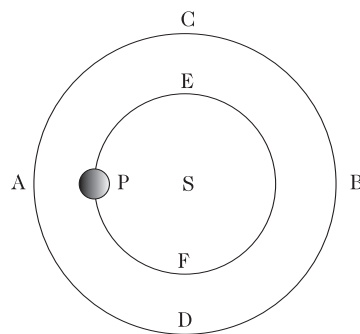


Figure 13

Un corps *P* est placé à la surface de cette sphère *PEQF*. Les couches situées au-dessus du corps *P* sont autant de sphères creuses qui n'exercent aucune attraction sur le corps *P* placé à l'intérieur (proposition 70). Seules agissent les couches placées en dessous, qui sont autant de surfaces sphériques qui attirent un corps extérieur avec une force décroissant avec le carré de la distance au centre.

le Soleil doit communiquer son mouvement de rotation à la matière fluide jusqu'à ce que l'ensemble tourne d'un bloc (comme cela a dû se passer pour les atmosphères planétaires). Si le tourbillon est en contact avec d'autres, il est accéléré ou freiné par les révolutions de ces tourbillons. Il ne peut être stable que si les périodes de révolutions de ses parties sont comme les carrés de leurs distances au centre (livre 2, propositions 52, corollaires 8 à 11). Infinis ou finis, les tourbillons de DESCARTES ne correspondent pas aux phénomènes astronomiques.

**Vitesse d'une planète à l'aphélie et au périhélie.**

Le tourbillon dans un espace fermé est analogue à un fluide contenu dans un vase. Si le vase n'est pas sphérique, les parties du tourbillon décrivent des ellipses et le fluide va plus rapidement dans les parties plus étroites et plus lentement dans les parties larges. En effet, Léonard de Vinci a découvert que la quantité de liquide qui traverse une section d'un tube dans l'unité de temps est constante : on dit que le débit est constant. La vitesse de l'écoulement est donc plus rapide dans les parties étroites du tube et est plus lente dans ses parties larges. Ce résultat se généralise à tous les fluides contenus dans des espaces alternativement plus larges et plus étroits : rivières dont les berges se rapprochent ou s'éloignent, orbites fluide d'une planète délimitée par d'autres orbites fluides, etc (37).

Supposons trois orbites *AD*, *BE* et *CF*, décrites autour du Soleil *S* (fig. n°16). Le Soleil est au milieu de l'orbite circulaire *CF* et la planète se déplace sur cette orbite avec un mouvement circulaire uniforme. Mais les deux autres orbites sont excentrées par rapport au Soleil *S* : on a donc deux aphélies, *A* et *B*, et deux périhélies, *D* et *E*. Les espaces compris entre *D* et *F* sont plus larges que les espaces compris entre *A* et *C*. Selon la loi des fluides, une partie du tourbillon doit se déplacer plus lentement dans les espaces plus larges entre les périhélies *D* et *F*, et doit se déplacer plus rapidement dans les espaces plus étroits entre les aphélies *A* et *C*. Ce qui est contraire aux lois de KEPLER, selon

rayons (comme  $1/R^2$ ). Donc :

- *différences des vitesses angulaires proportionnel à  $(1/R^2) / R$ ; proportionnel à  $1/R$*

Sur la droite  $SABCDEQ$ , on élève les perpendiculaires  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , etc., qui sont inversement comme les cubes des distances à l'axe (donc proportionnel à  $1/SA^3$ , à  $1/SB^3$ , à  $1/SC^3$ , etc.). Ces perpendiculaires représentent les différences des vitesses angulaires aux distances  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , etc.

La somme des différences des vitesses angulaires est le mouvement total d'une partie du fluide : en effet, le mouvement angulaire d'un point  $D$  du fluide est la somme des différences des mouvements angulaires des points  $D$ ,  $E$ , etc., plus lointains. Ces sommes, ou les mouvements totaux, sont comme les sommes des segments  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ , etc., ou (après un passage à la limite) comme les aires hyperboliques  $AaQ$ ,  $BbQ$ ,  $CcQ$ , etc. Les périodes des mouvements angulaires sont comme les inverses de ces aires :

- *période orbe DIO proportionnel à  $1/\text{aire } DdQ$ .*

Enfin,  $Dd \times DE$  ou  $DE / SD^3$  (car  $Dd$  est comme  $1 / SD^3$ ) est la variation de l'aire  $DdQ$  qui est donc comme  $1 / SD^2$  <sup>(36)</sup>.

Par conséquent, les temps périodiques des parties du fluides croissent avec les carrés des distances à l'axe, ou avec les carrés des rayons:

- *$T$  proportionnel à  $R^2$ ,*

Or, la 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER indique que:

- *$T^2$  proportionnel à  $R^3$  ou  $T$  proportionnel à  $R / 2$ .*

Les parties du tourbillont ne suivent pas la 3<sup>e</sup> loi de KEPLER ; il en est de même pour les planètes qui tournent selon la même loi que lui.

### **Tourbillons finis.**

Jusqu'ici, NEWTON a raisonné sur des tourbillons infinis. Mais DESCARTES supposait que le tourbillon du Soleil est limité par les tourbillons des étoiles voisines.

Si le tourbillon est fini sans être en contact avec d'autres,

L'attraction de la sphère pleine homogène augmente avec le nombre de couches, ou avec la masse de cette sphère, laquelle augmente avec son volume (le volume étant lui-même proportionnel au cube du rayon de la sphère). Mais cette attraction décroît avec le carré du rayon  $R$  de cette sphère. Donc, l'attraction est proportionnelle :

- *à masse /  $R^2$  ou à  $R^3 / R^2$  ou à  $R$ .*

L'attraction à l'intérieur d'une sphère pleine est donc comme la distance au centre d'une couche considérée. Au fur et à mesure que le corps  $P$  se rapproche du centre, son attraction diminue avec sa distance au centre et devient nulle au centre (livre 1, proposition 73).

Bien sûr, ici, on ne tient pas compte de la pression que les couches exercent les unes sur les autres, ni donc de la pression que subit le corps  $P$  du fait des couches placées au-dessus de lui.

## La forme de la Terre.

La Terre serait une sphère si elle ne tournait pas sur son axe.

### Effet de la force centrifuge.

Les parties d'une sphère en rotation font un effort pour s'éloigner de l'axe de rotation. Cet effort, dû à l'inertie de la matière, est plus connu sous le nom de « force centrifuge ». Cet effort est maximal à l'équateur de la sphère et est nul aux pôles.

Par conséquent, la rotation sidérale de la Terre (en 23 h 56 min) produit une force centrifuge, maximale à l'équateur et nulle aux pôles : le diamètre équatorial doit être plus grand que le diamètre polaire, la Terre étant supposée suffisamment élastique pour être déformée.

Ainsi, l'observation de la planète Jupiter montre un semblable renflement équatorial. Le diamètre équatorial de Jupiter (142 700 km) est plus grand que son diamètre polaire (133 200 km).

Un corps doit donc être plus léger à l'équateur de la Terre qu'aux pôles, d'une part parce que la force centrifuge compense une partie de son poids, et d'autre part parce que sa distance au centre est plus grande. Nous suivons la démonstration produite par NEWTON dans les propositions 19 et 20 du livre 3 des *Principia*.

### Valeur de la force centrifuge.

Un corps placé à une distance  $R$  égale à 6375 km du centre de la Terre et qui fait un tour complet dans une période  $T$  de 23 h 56 min (ou 86 400 secondes) décrit en 1 seconde un arc égal à :

$$(2 \pi \times R) / T = (2 \pi \times 6375 \text{ km}) / 86\,400 \text{ s} = 0,465 \text{ km} / \text{s}.$$

S'il n'était pas attiré vers le centre de la Terre, ce corps partirait tout droit selon la tangente et il s'écarterait de la surface

- *différences des vitesses ou « translations » des couches proportionnel à frictions ou « impressions » / surfaces en contact.*

Pour que les mouvements des couches soient uniformes, les frictions entre deux couches doivent se faire de façon égale en sens contraire, et donc s'équilibrer :

- *différences des vitesses ou « translations » des couches proportionnel à 1 / surfaces en contact.*

Mais les surfaces en contact sont des surfaces sphériques, et elles augmentent donc avec les carrés des rayons  $R$  des couches :

- *différences des vitesses ou « translations » des couches proportionnel à 1 /  $R^2$ .*

Vitesses angulaires.

Les vitesses angulaires (*les mouvements angulaires*) sont comme les angles décrits par les points  $A, B, C, D$ , etc, durant l'unité de temps.

Les différences des vitesses angulaires (ou des *mouvements angulaires*) sont comme les arcs décrits divisés par les distances à l'axe, ou comme les arcs décrits divisés par les rayons  $R$  :

- *différences des vitesses angulaires proportionnel à arcs décrits /  $R$ .*

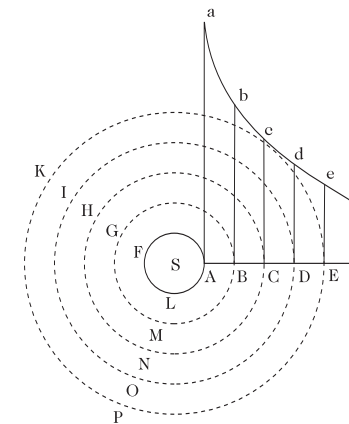


Figure 15

Mais les arcs décrits par les points  $A, B, C$ , etc., à leurs vitesses relatives les uns par rapport aux autres, sont comme les « translations » des couches ou comme les différences de leurs vitesses :

- *différences des vitesses angulaires proportionnel à translations /  $R$ .*

Mais ces « translations » ou différences de vitesses sont déjà comme les inverses des carrés des

ambiant. Sinon, la matière cessera peu à peu d'être mue en tourbillon (livre 2, proposition 52, corollaire 4).

De plus, tous ces tourbillons vont s'intermêler les uns dans les autres ; l'ensemble devient instable et aucun corps ne peut suivre une orbite stable (livre 2, proposition 52, corollaire 6).

### Densité des planètes.

Pour rester sur la même orbite, une planète doit être de la même densité que le fluide ambiant. Si elle est plus dense, elle fait effort pour s'éloigner de l'axe du mouvement (son effort centrifuge est plus important que celui du fluide) ; elle décrit alors une spirale. Si elle est moins dense, elle se rapproche du centre sur une spirale (livre 2, proposition 53).

Il faudrait donc admettre que la Terre est immergée dans un fluide de même densité qu'elle.

### Contradiction avec les Lois de KEPLER.

NEWTON montre que les périodes de révolution des parties d'un tourbillon n'obéissent pas à la 3<sup>e</sup> Loi de KEPLER (livre 2, proposition 52).

Une sphère *AFL* est en rotation (fig. n°15). Dans sa rotation, elle entraîne les différentes couches sphériques d'un fluide ambiant : couche *AFL*, couche *BGM*, couche *CHM*, etc. La friction (*l'impression*) entre deux couches est comme leur différence de vitesse (comme leurs *translations*) et comme les surfaces de contact.

terrestre d'une quantité égale au carré de l'arc décrit divisé par le diamètre de la Terre <sup>(29)</sup>, c'est-à-dire (en mètres) :

$$4652/12\ 750\ 000 = 0,0169.$$

Comparons cette déviation (de 0,0169 m) à la chute durant la 1<sup>ère</sup> seconde due à la pesanteur (4,90 m), et on trouve que la force centrifuge est 289 fois plus petite que la pesanteur.

### Déformation de la Terre.

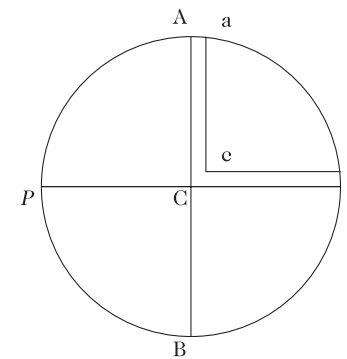


Figure 14

NEWTON suppose que la Terre est traversée par un canal ayant deux branches placées à angle droit : la branche *ACca* suit l'axe équatorial et l'autre branche suit l'axe polaire (fig. n°14). Ce canal est rempli d'eau et les deux branches communiquent entre elles au centre *C* de la Terre. La force centrifuge allège le poids de la branche équatoriale, mais ne change rien au poids de la branche polaire. Pour réaliser l'équilibre entre les deux branches, il faut allonger la branche équatoriale. Les deux branches ont alors le même poids, mais la branche équatoriale, plus longue, a une masse supérieure à celle de la branche polaire.

### Valeur de l'aplatissement.

NEWTON suppose d'abord que la Terre ne tourne pas sur elle-même et lui attribue un aplatissement de 1/100 : c'est-à-dire que le rapport de la différence entre l'axe équatorial *A* et l'axe polaire *B* sur l'axe polaire *B* est égale à 1/100.

- $Aplatissement = (A - B) / B = 1/100.$

La gravité au Pôle *Q* de la Terre est supérieure à la gravité à l'équateur *A*, parce que le point *A* est plus éloigné du centre *C* que le point *Q*.

Les poids des colonnes sont fonction de leurs masses (ou de leurs longueurs puisqu'on les suppose homogènes) et de l'accélération de la pesanteur. Ces colonnes sont à l'intérieur de la Terre : la gravité le long de ces colonnes est proportionnelle à la distance au centre de la Terre. Pour chaque colonne, l'accélération de la pesanteur est maximale à son sommet, c'est-à-dire à la surface de la Terre ; donc cette accélération est maximale en  $A$  et en  $Q$ . On retient les valeurs des accélérations maximales en  $A$  et en  $Q$  <sup>(30)</sup> :

- Accélération au Pôle  $Q = 504$ . Masse colonne polaire = 100.
- Poids de la colonne polaire = 501.
- Accélération à l'équateur  $A = 500$ . Masse colonne équatoriale = 101.
- Poids de la colonne équatoriale = 505.

La colonne équatoriale a un poids supérieur à celui de la colonne polaire : si une force centrifuge appropriée lui enlève les  $4 / 505^e$  de son poids excédentaire, les poids des deux colonnes deviennent égaux.

Mais la force centrifuge vaut en réalité la  $289^e$  partie du poids et non sa  $4 / 505^e$  partie. Une règle de trois nous donne l'aplatissement de la Terre :

- force centrifuge =  $4 / 505$  si aplatissement =  $1 / 100$ .
- force centrifuge =  $1 / 289$  si aplatissement =  $1 / 230$ .

Le diamètre équatorial de la Terre supposée homogène doit dépasser le diamètre polaire de quelque 54 km.

Les deux colonnes ont le même poids. Dans chaque colonne, les parties proportionnelles aux longueurs ont aussi le même poids : une partie de la colonne équatoriale est donc plus longue qu'une partie de la colonne polaire, tout en ayant le même poids. Mais les parties de même longueur ont des poids différents : une partie de la colonne polaire est donc plus lourde qu'une partie de la colonne équatoriale de même longueur. Un corps doit donc peser davantage au pôle qu'à l'équateur : le poids augmente en allant depuis le pôle jusqu'à l'équateur selon la relation :

$$1/230 \times \sin^2 \text{ latitude.}$$

## La critique des tourbillons de DESCARTES.

La physique newtonienne suppose que les corps célestes se déplacent dans le vide, ou du moins dans un milieu qui ne leur oppose qu'une très faible résistance. Si la planète Jupiter se déplaçait dans un milieu de même densité que notre air à quelques 300 km d'altitude, elle ne perdrait pas la millionième partie de son mouvement en un million d'années <sup>(31)</sup>.

En déclarant les espaces célestes vides de matière, NEWTON s'oppose à DESCARTES, pour qui le monde est plein de matière, sans aucun espace vide. DESCARTES confond l'étendue avec la substance. L'espace qu'on suppose vide : puisqu'il y a en lui de l'extension, il a nécessairement aussi de la substance <sup>(32)</sup>. DESCARTES rejetait l'action à distance : pour lui, un corps ne peut agir sur un autre que par contact direct ou par l'intermédiaire d'un autre corps ou d'un milieu qui transmette le mouvement <sup>(33)</sup>.

### **Le Tourbillon solaire.**

Selon DESCARTES, le Système solaire est immergé dans une matière subtile qui emporte les planètes dans sa révolution autour du Soleil. Cependant, à cause de sa rotation axiale, le Soleil accélère la révolution du tourbillon. Chaque planète est au repos la matière qui lui est contiguë, elle est au repos (relatif) dans son tourbillon ou dans son ciel <sup>(34)</sup>. Nous avons vu ce que NEWTON répondait à cela <sup>(35)</sup> De plus, la rotation axiale chaque planète produit un tourbillon par lequel cette planète entraîne ses satellites.

### **Instabilité des tourbillons.**

NEWTON rétorque à DESCARTES qu'une planète ne peut transmettre son mouvement de rotation à la matière qui lui est contiguë sans perdre progressivement son propre mouvement de rotation : il faut donc un *principe actif* pour rendre à la planète le mouvement qu'elle perd en le communiquant au fluide